I.G
60.159

INSTITUTUL GEOLOGIC AL ROMÂNIEI

STUDII TEHNICE ȘI ECONOMICE

SERIA D *Geofizică* Nr. 1

10010

ÉTUDES THÉORIQUES SUR LA PROSPECTION ÉLECTRIQUE DU SOUS-SOL

TROISIÈME SÉRIE

LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE QUASISTATIONNAIRE DE L'ÉMETTEUR DE LA TÉLÉGRAPHIE PAR LE SOL

PAR

SABBA S. STEFANESCU

INSTITUTUL GEOLOGIC - BIBLIOTECA
60159

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
BUCUREȘTI
1947

Institutul Geologic al României

Institutul Geologic al României

INSTITUTUL GEOLOGIC AL ROMÂNIEI

STUDII TEHNICE ŞI ECONOMICE

SERIA D *Geofizică* Nr. 1

GEOLOGIC 10010

ÉTUDES THÉORIQUES SUR LA PROSPECTION ÉLECTRIQUE DU SOUS-SOL

TROISIÈME SÉRIE

LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE QUASISTATIONNAIRE DE L'ÉMETTEUR DE LA TÉLÉGRAPHIE PAR LE SOL

PAR

SABBA S. STEFANESCU

INSTITUTUL GEOLOGIC - BIBLIOTECA 60.159

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
BUCUREŞTI
1947

IGR Institutul Geologic al României

Institutul Geologic al României

INSTITUTUL GEOLOGIC - BIBLIOTECA
60.159

PRÉFACE.

Le développement récent des méthodes de prospection électrique du sous-sol a ramené sur le plan de l'actualité un dispositif émetteur de champ électromagnétique, déjà utilisé pendant la première guerre mondiale pour l'établissement des communications de la télégraphie par le sol (T.P.S.).

Ce dispositif, qui sera désigné brièvement dans la suite de ce travail sous le nom d'« émetteur T.P.S. », est constitué par un câble rectiligne de longueur réduite (100—200 m) étendu à la surface du sol et relié à deux prises de terre (électrodes). Dans ce câble, un générateur envoie un courant alternatif à fréquence musicale. Le passage du courant dans le sol — entre les deux électrodes — détermine dans l'espace avoisinant un champ électromagnétique alternatif dont l'exploration au moyen d'un appareillage approprié (cadres goniométriques, sondes métalliques) peut fournir des indications des plus utiles sur les hétérogénéités du sous-sol.

Pour les points situés à une distance suffisamment grande des prises de terre, les dimensions réduites du dispositif d'émission permettent d'assimiler celui-ci à un simple dipôle alternatif horizontal. Cette approximation est d'ailleurs d'autant meilleure que la distance considérée est plus grande par rapport à la longueur du câble qui relie les électrodes.

Dans les cas où cette longueur du câble de jonction ne peut plus être négligée (méthode Sundberg et autres), le champ que l'émetteur détermine dans l'espace peut être considéré comme résultant de la superposition vectorielle des champs élémen-

Institutul Geologic al României

taires produits par une suite de dipôles reliés en série entre les deux prises de terre. Cette observation, due a R. M. FOSTER [1] et V. FOCK [2], assigne une importance primordiale à l'étude du dipôle alternatif horizontal pour la théorie de toutes les méthodes électromagnétiques à émetteurs filiformes pourvus de prises de terre. Dans le cas particulier où les deux électrodes terminales se trouvent en contact, l'émetteur devient fermé et simplement inductif. Les méthodes de prospection dites « par induction » se ramènent donc également, en principe, à celle où l'émetteur est un simple dipôle horizontal.

La connaissance du champ *normal* d'un tel dipôle (sous-sol homogène et isotrope, surface du sol plane) apparaît dès lors comme un point de départ pour toute la théorie physico-mathématique des méthodes de prospection électromagnétique. Antérieurement à toute tentative d'interprétation quantitative des anomalies enregistrées sur le terrain, une étude approfondie de cette distribution *normale* paraît absolument nécessaire. Cette étude constitue le principal objet du présent travail.

A cause de sa liaison étroite avec la théorie de SOMMERFELD et HOERSCHELMANN sur la radiation de l'antenne T.S.F. horizontale, nous présenterons aussi certains résultats analytiques concernant le champ é.-m. de ce type particulier de radioémetteur.

Si, ainsi que nous avons essayé de le montrer plus haut, le calcul analytique du champ du dipôle horizontal paraît essentiel pour fonder théoriquement les méthodes de prospection électromagnétique, le calcul *numérique* de ce même champ peut apporter, par ailleurs, la réponse à une série de problèmes du plus grand intérêt pour leurs applications *pratiques*. Voici quelques-uns de ces problèmes:

a) On connaît bien, en Électromagnétisme, l'existence d'un « effet de peau » (skin-effect), constitué par la concentration des courants alternatifs au voisinage de la surface des conducteurs qu'ils traversent. Puisque le sous-sol est un milieu conducteur, on peut se demander dans quelle mesure la fréquence utilisée par les méthodes de prospection é.-m. limite la pénétration des courants à l'intérieur de la terre.

Institutul Geologic al României

Une longue controverse à ce sujet, entre les géophysiciens spécialistes des méthodes électriques, trouvera dans ce qui suit la solution numérique exacte, conforme aux équations générales de l'Électricité, pour le cas de l'émetteur T.P.S.

b) Parmi les six composantes électromagnétiques mesurables par voie expérimentale, il en existe quelques-unes (ainsi que cela paraîtra clairement dans les graphiques annexés au texte) qui, même dans le cas normal d'un sol homogène, ont des variations rapides de phase ou d'amplitude sur un intervalle d'espace restreint. On peut affirmer à priori que la mesure de ces composantes qui présentent « spontanément » de telles variations rapides (par ex. H_φ) est moins recommandable au prospecteur électricien que celle des composantes à variation régulière (par ex. H_z).

En effet, dans le but d'interpréter ses résultats de terrain, l'expérimentateur sera conduit à extrapoler à l'intérieur du sol les anomalies trouvées en surface, et cette extrapolation sera d'autant plus problématique que la marche normale de la composante mesurée sera moins uniforme. Le calcul numérique complet du champ normal permet donc d'opérer dès le début une sélection utile entre les différentes quantités susceptibles d'être mesurées.

c) Les méthodes physico-mathématiques que l'on peut proposer pour l'interprétation des anomalies enregistrées sur le terrain devront, dans le cas du sol homogène, permettre de retrouver cette homogénéité si elles sont appliquées aux valeurs théoriques du champ à la surface du sol. L'exemple du sol homogène — un des rares que peut traiter complètement la Physique-Mathématique — peut donc servir à l'examen de la validité des méthodes d'interprétation quantitative.

Au point de vue *historique*, la théorie du champ normal du dipôle horizontal n'est nullement nouvelle, du moins sous son aspect analytique général. Elle est due a H. von Hoerschelmann qui, dans sa Thèse [3], en suivant la méthode employée par A. Sommerfeld [4] pour le champ du dipôle vertical, a reussi à exprimer sous forme d'intégrales définies les compo-

Institutul Geologic al României

santes du potential vecteur hertzien du dipôle horizontal. La théorie complète des différents types d'antennes d'émission électriques ou magnétiques, verticales ou horizontales, a été d'ailleurs exposée sous une forme synthétique par A. SOMMERFELD dans un article paru dans Annalen der Physik [5] ainsi que dans le tome II du traité [6].

La méthode employée par A. SOMMERFELD peut être appelée « méthode des fonctions de Bessel » par suite de l'emploi permanent de ces fonctions dans les expressions intégrales du potentiel vecteur; elle a été également employée dans les travaux deja cités de FOSTER [1] et FOCK [2]. Au point de vue de l'émetteur horizontal, elle a été étendue par J. RIORDAN et E. SUNDE [7], S. STEFANESCU et C. et M. SCHLUMBERGER [8], au cas d'un sous-sol constitué par une succession arbitraire de couches horizontales.

Par un travail de H. WEYL [9] a été inaugurée une nouvelle méthode de calcul de l'émission dans les milieux à conductivités et constantes diélectriques stratifiées. Cette méthode peut être appelée « des ondes planes », l'émission primaire de l'antenne y étant décomposée en une infinité d'ondes planes dont la réfraction dans les milieux stratifiés de l'atmosphère ou du sous-sol peut être calculée par les formules de FRESNEL. Les théoriciens — parmi lesquels il faut citer en premier lieu M.J.O. STRUTT [10] et GROSSKOPF [11] — ont accordé ces derniers temps une préférence toujours plus marquée à la méthode de WEYL. Ceci est dû, d'une part, à la circonstance que les déformations subies par l'onde plane dans les différentes couches dispersives peuvent être calculées avec une certaine facilité et d'autre part, au fait que, par des intégrations dans le plan complexe, on peut obtenir des expressions asymptotiques très utiles, qu'il serait malaisé de déduire des intégrales du type SOMMERFELD.

L'intérêt toujours plus grand suscité par la diffraction des ondes é.-m. suivant la courbure du globe terrestre et, plus récemment, par la propagation des ondes courtes dans les milieux ionisés de la haute atmosphère a relegué provisoirement au second plan l'étude de la propagation des ondes à l'intérieur

Institutul Geologic al României

du sol. Dans ce domaine restreint de problèmes, intéressant spécialement les méthodes de prospection électromagnétique et, dans une mesure plus réduite, les télécommunications par fil, nous ne pouvons citer de travaux théoriques réellement originaux que ceux déjà mentionnés et, tout particulièrement, ceux de R. M. FOSTER [1], V. FOCK [2] et RIORDAN-SUNDE [7].

Le sujet [1]) du présent travail concerne spécialement le régime quasistationnaire de l'émetteur T.P.S., lequel est par définition un régime alternatif à fréquence suffisamment basse pour que les courants de déplacement puissent être négligés par rapport aux courants de conduction. En ce qui concerne la validité de son emploi dans le problème qui nous occupe, une discussion entreprise par M. ABRAHAM [12] et ses collaborateurs [13] a prouvé que pour toutes les fréquences musicales (les plus intéressantes pour les méthodes de prospection é.-m, par suite de l'influence réduite du skin-effect) les courants de déplacement sont certainement négligeables par rapport aux courants de conduction à l'intérieur du sol. Cette approximation, admise généralement pour les fréquences musicales des télécommunications par fil [voir POLLACZEK [14], HABERLAND [15], CARSON [16]] revient à égaler à zéro — dans les équations de propagation — la constante diélectrique de l'air et du sol.

Dans ces conditions bien définies, le développement des résultats de R. M. FOSTER (loc. cit.) et V. FOCK (loc. cit.) — lesquels ont montré la possibilité d'exprimer en termes finis, au moyen des fonctions de BESSEL et HANKEL, les composantes du potentiel vecteur du dipôle T.P.S. à l'intérieur du sol — nous a permis de calculer explicitement les expressions des 6

[1]) Ce travail, dont la partie introductive générale figure déjà dans [8], a fait par ailleurs l'objet d'un article en deux parties sous le titre: « Das elektromagnetische Normalfeld des waagerechten Niederfrequenzdipols » dans la revue *Beiträge zur angewandten Geophysik* (Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig).

La première partie a paru dans Bd. 9, Hf. 3/4, pp. 201—233, 1942.

La deuxième partie n'a pas encore été imprimée, par suite des événements de la guerre.

Institutul Geologic al României

composantes é.-m, à la surface du sol (Ch. II) et en son intérieur (Ch. III).

Les calculs numériques, particulièrement laborieux, effectués au moyen des tables JAHNKE-EMDE [17], ont permis de présenter sous forme de courbes d'égale valeur de l'amplitude et de la phase la distribution de ces 6 composantes é.-m. en coordonnées cylindriques à l'intérieur du sol.

Au cours de nos recherches sur le dipôle alternatif horizontal, nous avons observé que les formules SOMMERFELD-HOERSCHELMANN qui définissent le potentiel vecteur magnétique hertzien de ce dipôle pour le cas d'une constante ε *différente de zéro*, ont un équivalent intéressant dans les expressions d'un potentiel vecteur électrique — du type FITZGERALD — relatif au même phénomène de radiation. L'étude de ce potentiel vecteur électrique, outre des applications immédiates au cas quasistationnaire (voir la note à la fin du ch. III), nous a conduit à des conclusions qui paraissent jeter une lumière nouvelle sur la classification des différents types d'antennes, telle qu'elle a été formulée par SOMMERFELD (loc. cit.). Vu que cette étude — qui ne néglige pas les courants de déplacement — a une généralité plus grande que celle concernant le dipôle quasistationnaire, nous avons considéré qu'elle peut former une bonne introduction à notre sujet, sur lequel elle présente une certaine priorité logique; nous en avons constitué le chapitre I.

Un dernier chapitre (Ch. IV) présente les résultats obtenus en collaboration avec T. P. GHIȚULESCU et M. SOCOLESCU dès l'année 1931, dans une série de recherches expérimentales effectuées à Seceleanu (district Ialomitza). Ces résultats permettent une confrontation immédiate avec les prévisions théoriques formulées dans les chapitres antérieurs.

Les résultats exposés dans notre travail sont le fruit des recherches entreprises dans le cadre de la Section de Géophysique appliquée de l'Institut Géologique de Roumanie.

Pour le haut esprit scientifique avec lequel ont été accordés l'encouragement et les conditions morales et matérielles

Institutul Geologic al României

nécessaires à l'exécution de ces études, nous présentons nos remerciements respectueux à Mr. le Prof. G. MACOVEI, Directeur de l'Institut Géologique de Roumanie.

A Mr. le Prof. G. MURGEANU et à tous mes collègues de l'Institut, j'adresse l'expression de ma vive gratitude pour leur parfaite confiance et bonne camaraderie qui m'ont puissamment aidé à mener à leur fin ces recherches longues et laborieuses.

A Mr. le Prof. G. ATANASIU et à MM. les Professeurs de la Faculté des Sciences de Bucarest, qui m'ont guidé et encouragé dans la présentation de ce travail comme Thèse, j'adresse mes hommages respectueux.

Pour la concours extrêmement précieux dans l'exécution et le contrôle des calculs numériques, mes remerciements affectueux vont à Mme. LIA S. STEFANESCU et à mes collaborateurs ST. DUMITRU et C. ILIESCU.

Institutul Geologic al României

Institutul Geologic al României

CHAPITRE I

COMPLÉMENTS A LA THÉORIE SOMMERFELD-HOERSCHELMANN DU DIPÔLE HORIZONTAL. APPLICATION AUX ANTENNES MAGNÉTIQUES.

1. *Rappel des principaux résultats de la théorie Sommerfeld-Hoerschelmann du dipôle horizontal.* — Les notations de ce chapitre seront celles utilisées par SOMMERFELD dans son exposé [6]. On désigne par

$\mathcal{E}$, le champ électrique instantané,
$\mathcal{H}$, » » magnétique » ,
$\mathfrak{D}$, le déplacement électrique instantané,
$\mathfrak{B}$, l'induction magnétique,
$\mathfrak{J}$, la densité de courant,
ρ, la densité spatiale de l'électricité,
c, la vitesse de la lumière $= 3{,}00 \times 10^{10}$ cm/sec.

Dans le système d'unités HEAVISIDE, les équations de MAXWELL s'écrivent

$$\text{(I)} \quad \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}} = -\operatorname{rot}\mathcal{E}, \qquad \text{(III)} \quad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0,$$

$$\text{(II)} \quad \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{J}) = \operatorname{rot}\mathcal{H}, \qquad \text{(IV)} \quad \operatorname{div}\mathfrak{D} = \rho,$$

Dans les milieux isotropes, dénués de saturation ou d'hystérésis magnétique ou électrique — les seuls qui seront pris en considération — ces relations sont complétées par les relations de proportionnalité

$$\text{(V)} \quad \mathfrak{D} = \varepsilon\mathcal{E}, \qquad \mathfrak{B} = \mu\mathcal{H}, \qquad \mathfrak{J} = \sigma\mathcal{E},$$

Institutul Geologic al României

où l'on a noté par

ε, la constante diélectrique du milieu,
μ, la perméabilité magnétique » ,
σ, la conductivité électrique » .

Dans un milieu où ε, μ, σ sont des constantes, les équations de MAXWELL sont résolues d'habitude au moyen d'un potentiel vecteur hertzien Π (dont les composantes cartésiennes sont Π_x, Π_y, Π_z), lequel détermine les composantes électromagnétiques par les relations [ibid., p. 429, form. (18)]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} (\varepsilon \dot{\Pi} + \sigma \Pi),$$

(1-6 a, b)

$$\mathcal{E} = -\left\{ \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \ddot{\Pi} + \frac{\sigma\mu}{c^2} \dot{\Pi} \right\} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi.$$

Les composantes du potentiel Π satisfont individuellement à l'équation des télégraphistes

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \ddot{\Pi} + \frac{\sigma\mu}{c^2} \dot{\Pi} = \Delta \Pi. \tag{1-7}$$

Pour l'étude des phénomènes de radiation, il suffit d'avoir en vue des oscillations purement sinusoïdales, qui s'obtiennent en mettant en évidence dans $\mathcal{H}$, $\mathcal{E}$, Π le facteur complexe $e^{-i\omega t}$, où ω désigne la pulsation du courant dans l'émetteur. Par suppression de ce facteur aux deux membres des équations précédentes, celles-ci deviennent

$$\mathcal{H} = -i \frac{\varepsilon\omega + i\sigma}{c} \operatorname{rot} \Pi = -\frac{ic}{\mu\omega} k^2 \operatorname{rot} \Pi,$$

(1-8 a, b, c)

$$\mathcal{E} = k^2 \Pi + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi,$$

$$\Delta\Pi + k^2 \Pi = 0,$$

où l'on a noté par k la « constante de propagation »

$$k^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2 + i\sigma\mu\omega}{c^2}. \tag{1-9}$$

Dans le cas d'un dipôle horizontal placé parallèlement à *ox* à l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes, *oxy* étant la surface plane d'un sol supposé homogène et isotrope, *oz* la verticale descendante, S. et H. ont montré que les con-

Institutul Geologic al României

ditions maxwelliennes de passage des composantes é.-m. dans le plan de séparation air-sol (continuité des composantes tangentielles de $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ et des composantes normales de $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$) sont satisfaites si l'on admet l'existence d'un potentiel vecteur Π, dont la composante Π_y est identiquement nulle dans l'air et dans le sol et dont les deux autres composantes sont [pp. 567—568, form. (10) et (15)] dans l'air ($z > 0$)

$$\Pi_{x0} = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{N'} e^{-z\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} \lambda \, d\lambda,$$

(1-10 a, b)

$$\Pi_{z0} = (k^2 - k_0^2) \cos\varphi \int_0^\infty \frac{J'(\lambda r)}{N N'} e^{-z\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} \lambda^2 d\lambda,$$

dans le sol ($z < 0$),

$$\Pi_x = \frac{k_0^2}{k^2} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{N'} e^{z\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \lambda^2 d\lambda,$$

(1-11 a, b)

$$\Pi_z = (k^2 - k_0^2) \frac{k_0^2}{k^2} \cos\varphi \int_0^\infty \frac{J'(\lambda r)}{N N'} e^{z\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \lambda^2 d\lambda,$$

Dans ces formules, on a noté par

(1-12) $k_0^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$ la constante de propagation de l'air,

(1-9′) $k^2 = \dfrac{\varepsilon\omega^2 + i\sigma\omega}{c^2}$ la constante de propagation du sol (on suppose $\mu = 1$),

J_0, la fonction de Bessel d'ordre zéro,

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, la distance radiale au dipôle,

φ, l'azimut,

λ, un paramètre d'intégration,

(1-13) $N = k^2\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} + k_0^2\sqrt{\lambda^2 - k^2}$,

(1-14) $N' = \sqrt{\lambda^2 - k^2} + \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$.

Institutul Geologic al României

En vertu des équations (1-8), les composantes du champ é.-m. se déduisent de celles du p. v. Π par les formules de différentiation (p. 566)

$$\mathcal{H}_x = -\frac{ic}{\omega} k^2 \frac{\partial \Pi_z}{\partial y}, \qquad \mathcal{E}_x = k^2 \Pi_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}\right),$$

(1-15 a, b, c) (1-16 a, b, c)

$$\mathcal{H}_y = -\frac{ic}{\omega} k^2 \left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial x}\right), \qquad \mathcal{E}_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}\right),$$

$$\mathcal{H}_z = \frac{ic}{\omega} k^2 \frac{\partial \Pi_x}{\partial y}, \qquad \mathcal{E}_z = k^2 \Pi_z + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}\right).$$

2. *Introduction d'un potentiel vecteur électrique. Vérifications.* Pour le cas d'un dipôle magnétique, SOMMERFELD a introduit dans sa théorie de la propagation un potentiel vecteur électrique, qui permet la résolution des équations MAXWELL d'une manière parallèle à celle donnée par les relations (1-8 a, b, c) pour le dipôle électrique. Nous nous proposons de montrer dans ce qui suit que d'une manière analogue, pour le dipôle *électrique* horizontal, la considération d'un potentiel vecteur électrique est intéressante et conduit à des expressions plus simples que celles — (1-10) et (1-11) — trouvées par S. et H. pour le potentiel vecteur hertzien (magnétique).

Supposons comme précédemment la perméabilité du sol $\mu = 1$. Les équations de MAXWELL peuvent être résolues d'une manière formelle, en régime purement sinusoïdal, par des relations absolument analogues à (1-8 a, b, c)

$$\mathcal{H} = k^2 \Omega + \text{grad div } \Omega, \qquad \mathcal{E} = \frac{i\omega}{c} \text{ rot } \Omega,$$

(1-17 a, b, c) $$\Delta \Omega + k^2 \Omega = 0,$$

Ω étant un potentiel vecteur électrique, dont nous nous proposons de définir la forme analytique.

A cet effet, nous admettrons comme hypothèse de travail, vérifiée en détail par les calculs ultérieurs, que, ainsi que le p. v. magnétique Π a une composante Π_y identiquement nulle

Institutul Geologic al României

dans l'air et dans le sol, le potentiel vecteur électrique Ω a — lui aussi — une composante Ω_x nulle identiquement dans ces deux milieux. Pour la démonstration, nous montrerons que les équations (1-15) et (1-16) permettent de déterminer d'une manière univoque les composantes Ω_y et Ω_z en fonction de Π_y et Π_z, par confrontation avec le système scalaire

$$\mathcal{H}_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_z}{\partial z}\right), \qquad \mathcal{E}_x = \frac{i\omega}{c}\left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \Omega_y}{\partial z}\right),$$

(1-18 a, b, c) (1-19 a, b, c)

$$\mathcal{H}_y = k^2\Omega_y + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_z}{\partial z}\right), \quad \mathcal{E}_y = -\frac{i\omega}{c}\cdot\frac{\partial \Omega_z}{\partial x},$$

$$\mathcal{H}_z = k^2\Omega_z + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_z}{\partial z}\right), \quad \mathcal{E}_z = \frac{i\omega}{c}\cdot\frac{\partial \Omega_y}{\partial x},$$

équivalent aux équations vectorielles (1-17 a, b).

Avant de procéder à la comparaison des deux modes d'expression des composantes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{E}$ — d'une part (1-15) et (1-16), d'autre part (1-18) et (1-19) — remarquons que la forme (1-10 b) et (1-11 b) des composantes Π_{z0} et Π_z conduit à poser (1-20 a, b)

$$\Pi_{z0} = \frac{\partial \psi_0}{\partial x}, \qquad \psi_0 = (k^2 - k_0^2)\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{N N'} e^{-z\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}\, \lambda d\lambda,$$

(1-21 a, b)

$$\Pi_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \psi = (k^2 - k_0^2)\frac{k_0^2}{k^2}\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{N N'} e^{-z\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, \lambda d\lambda,$$

où ψ_0 et ψ désignent des fonctions d'onde ayant la symétrie de révolution autour de l'axe vertical oz.

Procédons maintenant à l'identification des composantes magnétiques (1-15 a, b, c) avec (1-18 a, b, c) à l'intérieur du sol; nous aurons, par suite de (1-21 a, b)

$$a)\ \mathcal{H}_x = -\frac{ic}{\omega}k^2\frac{\partial \Pi_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\Omega) = -\frac{ic}{\omega}k^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y}.$$

On est conduit à poser

$$(1\text{-}22) \qquad \operatorname{div}\Omega = -\frac{ic}{\omega}k^2\frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Institutul Geologic al României

$b)$ $\mathcal{H}_y = -\frac{ic}{\omega} k^2 \left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial x} \right) = k^2 \Omega_y + \frac{\partial}{\partial y} (\text{div } \Omega)$

$$= k^2 \Omega_y - \frac{ic}{\omega} k^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{ic}{\omega} k^2 \left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)$$

est vérifiée identiquement si l'on pose

$$\boxed{\Omega_y = \frac{ic}{\omega} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} \right).} \tag{1-23}$$

Cette expression, par suite du fait que ψ est fonction d'onde donc

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0, \tag{1-24}$$

devient

$$\Omega_y = -\frac{ic}{\omega} \left\{ \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi \right\}. \tag{1-25}$$

$c)$ $\mathcal{H}_z = \frac{ic}{\omega} k^2 \frac{\partial \Pi_x}{\partial y} = k^2 \Omega_z + \frac{\partial}{\partial z} (\text{div } \Omega) = k^2 \Omega_z - \frac{ic}{\omega} k^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}$

est vérifiée identiquement si l'on pose

$$\boxed{\Omega_z = \frac{ic}{\omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Pi_x + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right).} \tag{1-26}$$

Pour que les expressions (1-23) et 1-26) soient acceptables, elles doivent vérifier

$\alpha)$ l'équation (1-22). On a effectivement en vertu de (1-24)

$$\text{div } \Omega = \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} = \frac{ic}{\omega} \left\{ \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^2 \partial y} \right\}$$

$$= -\frac{ic}{\omega} k^2 \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Institutul Geologic al României

β) les équations qui résultent de l'égalisation des expressions (1-16 a, b, c) et (1-19 a, b, c) des composantes électriques. En effet

$$\mathcal{E}_x = \frac{i\omega}{c}\left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \Omega_y}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{i\omega}{c}\left\{\frac{ic}{\omega}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\Pi_x + \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) - \frac{ic}{\omega}\left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2 \partial z} - \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial z^2}\right)\right\}$$

$$= -\left\{\frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial z}\right\} = k^2 \Pi_x + \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial x \partial z}$$

$$= k^2 \Pi_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}\right),$$

$$\mathcal{E}_y = -\frac{i\omega}{c} \cdot \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} = -\frac{i\omega}{c} \cdot \frac{ic}{\omega} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\Pi_x + \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}\right),$$

$$\mathcal{E}_z = \frac{i\omega}{c}\frac{\partial \Omega_y}{\partial x} = \frac{i\omega}{c} \cdot \frac{ic}{\omega}\left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial x \partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi\right)$$

$$= k^2 \Pi_z + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}\right).$$

γ) l'équation des ondes (1-24). Ceci résulte du fait que ψ et Π — ainsi que leurs dérivées partielles en x, y, z — vérifient à leur tour ce même type d'équation.

En résumé, les vérifications détaillées précédentes nous permettent d'affirmer que l'hypothèse $\Omega_x = 0$ est légitime et que (1-23) et (1-26) définissent d'une manière adéquate les composantes Ω_y et Ω_z du potentiel vecteur électrique.

Les calculs indiqués ci-dessus se rapportent au champ é.-m. dans le sol. Dans l'air, on obtient des expressions analogues à

Institutul Geologic al României

(1-23) et (1-26) pour les composantes Ω_{y0} et Ω_{z0} par substitution de ψ_0, Π_{x0}, k_0 à ψ, Π_x, k.

A un point de vue plus général, attendu que — ainsi qu'il a été montré dans [8] p. 115 — le potentiel vecteur magnétique du dipôle T.P.S. a dans le cas d'une *stratification horizontale quelconque* (du sol ou de l'air) une composante Π_y identiquement nulle (dans l'air et dans le sol), on peut affirmer l'existence d'une propriété analogue pour le potentiel vecteur électrique Ω: sa composante Ω_x est nulle dans ces deux milieux, tandis que Ω_y et Ω_z sont reliés à Π_x et Π_z par les relations (1-23) et (1-26).

3. *Expressions sous forme d'intégrales définies des composantes Ω_y et Ω_z dans le sol et dans l'air. — a)* Si l'on porte dans les relations (1-25) et (1-26) les expressions (1-11 b) et (1-21 a, b) de Π_x et ψ, on obtient pour Ω_y et Ω_z — *dans le sol* les formules suivantes

$$\alpha)\ \Omega_y = -\frac{ic}{\omega}\left(k^2\psi + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial \Pi_x}{\partial z}\right)$$

$$= -\frac{ic}{\omega}\left\{(k^2 - k_0^2)\frac{k_0^2}{k^2}\int_0^\infty \frac{\lambda^2}{N N'} J_0(\lambda r)\, e^{z\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, \lambda\, d\lambda \right.$$

$$\left. + \frac{k_0^2}{k^2}\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{N'} e^{z\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \sqrt{\lambda^2 - k^2}\, \lambda\, d\lambda \right\}$$

$$= -\frac{ic}{\omega}\left\{\frac{k_0^2}{k^2}\int_0^\infty \frac{1}{N'}\left[\frac{(k^2 - k_0^2)\lambda^2}{N} + \sqrt{\lambda^2 - k^2}\right]\right.$$

$$\left. \times J_0(\lambda r)\, e^{z\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, \lambda\, d\lambda \right\}.$$

Par suite des définitions (1-13) et (1-14) des quantités N et N', on peut facilement vérifier l'identité

$$\frac{1}{N'}\left[\frac{k^2 - k_0^2}{N}\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 - k^2}\right] = 1 - \frac{k_0^2\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{N}$$

Institutul Geologic al României

qui permet d'écrire

$$\Omega_y = -\frac{ic}{\omega}\cdot\frac{k_0^2}{k^2}\int_0^\infty \left[1 - k_0^2\frac{\sqrt{\lambda^2-k^2}}{N}\right] \times J_0(\lambda r)\, e^{z\sqrt{\lambda^2-k^2}}\,\lambda\, d\lambda$$

$$= -\frac{ic}{\omega}\frac{k_0^2}{k^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\int_0^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} - \frac{k_0^2}{N}\right] J_0(\lambda r)\, e^{z\sqrt{\lambda^2-k^2}}\,\lambda\, d\lambda.$$

Par suite de l'identité bien connue [ibid., p. 546, f. (11)]

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} J_0(\lambda r)\, e^{z\sqrt{\lambda^2-k^2}}, \qquad (R = \sqrt{r^2+z^2})$$

on obtient finalement

(1-27) $$\boxed{\Omega_y = \frac{ic}{\omega}\cdot\frac{k_0^2}{k^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(k_0^2\,\Lambda - \frac{e^{ikR}}{R}\right)}$$

où l'on a posé

(1-28) $$\boxed{\Lambda = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{N}\, e^{z\sqrt{\lambda^2-k^2}}\,\lambda\, d\lambda.}$$

β). $$\Omega_z = \frac{ic}{\omega}\frac{\partial}{\partial y}\left(\Pi_x + \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{ic}{\omega}\cdot\frac{k_0^2}{k^2}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty \frac{1}{N'}\left[1 + \frac{k^2-k_0^2}{N}\sqrt{\lambda^2-k^2}\right] \times J_0(\lambda r)\, e^{z\sqrt{\lambda^2-k^2}}\,\lambda\, d\lambda.$$

Par suite des expressions (1-13), (1-14) de N et N′ on a

$$\frac{1}{N'}\left[1 + \frac{k^2-k_0^2}{N}\sqrt{\lambda^2-k^2}\right] = \frac{k^2}{N}$$

et par conséquent

(1-29) $$\boxed{\Omega_z = \frac{ic}{\omega}\, k_0^2\frac{\partial\Lambda}{\partial y}.}$$

Institutul Geologic al României

Les expressions (1-27) et (1-29) des composantes du potentiel vecteur Ω présentent la particularité remarquable de ne contenir qu'*une seule transcendante inconnue*, la fonction Λ, dont elles se déduisent par des dérivations partielles en y et z. Cette propriété montre tout l'avantage qu'il y a d'utiliser dans l'étude du champ é.-m. le potentiel vecteur électrique au lieu du p. v. magnétique, introduit par S. et H., dont les composantes Π_x et Π_z ont des structures analytiques (1-11 a) et (1-11 b) si différentes. D'ailleurs, Λ est une fonction déjà rencontrée dans l'étude du dipôle vertical [ibid., p. 548, form. (16)] qui représente, au facteur $2k_0^2$ près, le *potentiel vecteur hertzien de ce dipôle vertical à l'intérieur du sol.* On voit donc que les expressions du potentiel vecteur électrique mettent en évidence une *liaison structurale intime et simple entre les radiations des dipôles horizontal et vertical*; cette liaison est inapparente dans les composantes hertziennes Π_x et Π_z de SOMMERFELD et HOERSCHELMANN.

b) Dans l'air, les mêmes relations (1-25) et (1-26), dans lesquelles nous substituerons les valeurs (1-10 a) et (1-20 b) des fonctions Π_{x0} et ψ_0, nous conduisent — par une marche absolument analogue — aux expressions suivantes

$$\Omega_{y0} = \frac{ic}{\omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(k^2\Lambda_0 - \frac{e^{ik_0R}}{R}\right), \tag{1-30}$$

$$\Omega_{z0} = \frac{ic}{\omega}k_0^2\frac{\partial\Lambda}{\partial y}, \tag{1-31}$$

où l'on a noté par

$$\Lambda_0 = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{N} e^{-z\sqrt{\lambda^2-k^2}}\,\lambda\,d\lambda \qquad (z>0) \tag{1-32}$$

une fonction similaire à Λ. Au facteur constant $2k^2$ près, Λ_0 représente le potentiel vecteur du dipôle vertical dans l'air [p. 548, form. (15)]. Comme il était à prévoir, la relation entre les p. v. des dipôles horizontal et vertical se retrouve aussi dans l'air.

4. *Relations directes entre les p. v. hertziens des dipôles horizontal et vertical. Antennes magnétiques.* — Le fait qu'il existe

Institutul Geologic al României

une relation étroite entre les composantes Ω_y et Ω_z du p. v. électrique du dipôle horizontal et la fonction Λ qui définit le p. v. magnétique du dipôle vertical, nous conduit à admettre que les composantes hertziennes Π_x, Π_z (ou ψ) possèdent également des connexions simples avec la même fonction Λ. Les calculs suivants donnent effectivement les expressions de ces composantes en fonction de Λ.

a) ψ et Π_z. Par comparaison des équations (1-26) et (1-29) on est conduit à écrire

$$\Pi_x + \frac{\partial \psi}{\partial z} = k_0^2 \Lambda. \tag{1-33}$$

Cette identité peut d'ailleurs être également vérifiée par un calcul direct, en partant des intégrales définies qui expriment Π_x, ψ et Λ.

Si l'on porte le premier membre de l'eq. (1-33) dans l'expression (1-25) de Ω_y, celle-ci devient

$$\Omega_y = \frac{ic}{\omega}\left\{k_0^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial z} + k^2 \psi\right\}. \tag{1-34}$$

Par comparaison avec (1-27), on obtient

$$\psi = \frac{k_0^2}{k^4} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{e^{ikR}}{R} - (k^2 + k_0^2)\,\Lambda\right\} \tag{1-35}$$

et par suite

$$\Pi_z = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{k_0^2}{k^4} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left\{\frac{e^{ikR}}{R} - (k^2 + k_0^2)\,\Lambda\right\}. \tag{1-36}$$

b) Π_x. On déduit de (1-33) et (1-35)

$$\Pi_x = k_0^2 \Lambda + \frac{k_0^2}{k^2}\left(1 + \frac{k_0^2}{k^2}\right)\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} - \frac{k_0^2}{k^4}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right). \tag{1-37}$$

Si l'on pose

$$\Pi_x = \frac{k_0^2}{k^2}\Lambda', \qquad \boxed{\Lambda' = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{N'}\, e^{z\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, \lambda d\lambda} \tag{1-38}$$

INSTITUTUL GEOLOGIC - BIBLIOTECA 60.159
Institutul Geologic al României

on arrive à la relation suivante entre Λ' et Λ

$$(1\text{-}39) \qquad \Lambda' = k^2\Lambda + \left(1 + \frac{k_0^2}{k^2}\right)\frac{\partial^2\Lambda}{\partial z^2} - \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right).$$

La fonction Λ' — multipliée par 2 — représente le p. v. électrique de l'*antenne magnétique verticale* [p. 565, form. (4)].

Par l'intermédiaire de l'éq. (1-39), le potentiel vecteur électrique de l'antenne magnétique verticale s'exprime donc au moyen de la même fonction Λ.

Enfin, le p. v. électrique de l'*antenne magnétique horizontale* a — dans le sol — les composantes [p. 573, form. (27) et (29)]

$$\Pi_y = \int_0^\infty \frac{2k_0^2}{N} J_0(\lambda r)\, e^{z\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, \lambda\, d\lambda,$$

$$\Pi_z = 2\sin\varphi\,(k^2 - k_0^2)\int_0^\infty \frac{J'(\lambda r)}{NN'}\, e^{z\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\, \lambda^2 d\lambda.$$

Par comparaison avec (1-28) et (1-11 b) on voit que

$$\Pi_y = 2k_0^2\Lambda, \qquad \Pi_z = 2\frac{k^2}{k_0^2}\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Dans l'air, des relations analogues peuvent être établies sans difficulté.

5. *En conclusion, les champs électromagnétiques des quatre types d'antennes examinés par* SOMMERFELD *peuvent etre déduits formellement de l'unique champ du dipôle hertzien vertical.*

Institutul Geologic al României

CHAPITRE II

CHAMP T.P.S. QUASISTATIONNAIRE. POTENTIEL VECTEUR DANS LE SOL ET A LA SURFACE. COMPOSANTES É.-M. A LA SURFACE DU SOL.

6. *Notations. Équations générales.* — Les résultats du chapitre précédent peuvent être considerés comme une simple annexe aux travaux du Prof. SOMMERFELD; aussi avons-nous trouvé utile d'employer dans leur présentation exactement les mêmes notations — aujourd'hui classiques — utilisées par le savant auteur dans ses articles originaux et dans son exposé de « RIEMANN-WEBER'S » [6].

Pour le cas particulier du dipôle T.P.S. quasistationnaire qui fera d'une manière exclusive l'objet de la suite de ce travail, les notations adoptées serons, en général, celles de notre publication [8], légérement différentes de celles de SOMMERFELD; nous les rappellerons brièvement.

Le dipôle est supposé placé à l'origine o d'un trièdre trirectangle $oxyz$ dans la direction de l'axe ox . oz est dirigé suivant la verticale descendante, oxy est la surface du sol; le sous-sol — homogène, isotrope — occupe ainsi le demi-espace $z > 0$, l'air — le demi-espace $z < 0$.

On se sert également des coordonnées cylindriques r, φ, z, avec

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \tag{2-1}$$

On pose:

σ, conductivité du sol en unités E.M.,

Institutul Geologic al României

f, fréquence, en périodes/seconde,

$\omega = 2\pi f$, pulsation.

En lieu et place de la quantité k, introduite — à la suite de SOMMERFELD — dans nos travaux antérieurs, nous utiliserons dorénavant la notation plus commode de R. M. FOSTER [1] définie par

$$\gamma^2 = -k^2 = 4\pi\sigma\omega i, \quad \gamma = -ik = |\gamma|\sqrt{i}\,. \tag{2-2}$$

On fait ainsi disparaître formellement — dans la plupart des expressions — l'imaginaire pure i.

γ est une quantité complexe, dont l'affixe est située sur la diagonale du premier quadrant et qui a pour dimension L^{-1}.

Pour les fonctions de BESSEL et de HANKEL d'argument complexe, nous employons — à l'exemple de FOSTER — les notations répandues dans la littérature anglo-saxonne par le traité de WATSON [18] et très pratiques dans le problème particulier que nous avons en vue. Celles-ci sont reliées aux notations ordinaires J et H par les égalités:

$$\text{Fonctions de BESSEL: } I_0(x) = J_0(ix), \quad I_1(x) = -iJ_1(ix), \tag{2-3}$$

$$\text{Fonctions de HANKEL: } K_0(x) = \frac{\pi}{2} i H_0^1(ix), \; K_1(x) = -\frac{\pi}{2} H_1^1(ix),$$

valables quelque soit x — réel ou complexe. Entre ces fonctions on a la relation

$$I_0(x)K_1(x) + I_1(x)K_0(x) = \frac{1}{x}. \tag{2-4}$$

Nous ferons par la suite un usage constant des relations suivantes entre les fonctions cylindriques et leurs dérivées

$$\frac{d}{dx} I_0(x) = I_1(x), \quad \frac{d}{dx} I_1(x) = -\frac{1}{x} I_1(x) + I_0(x),$$

$$\frac{d}{dx} K_0(x) = -K_1(x), \quad \frac{d}{dx} K_1(x) = -\frac{1}{x} K_1(x) - K_0(x), \tag{2-5}$$

pour la démonstration desquelles nous renvoyons aux ouvrages spéciaux.

Institutul Geologic al României

Les champs électriques et magnétiques que nous envisageons sont strictement sinusoïdaux, les valeurs instantanées $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ étant définies, comme d'habitude, par:

$$\mathcal{E} = \mathrm{Re}\,(E e^{i\omega t}) \quad , \quad \mathcal{H} = \mathrm{Re}\,(H e^{i\omega t}) \tag{2-6}$$

(Re = partie réelle)

où E et H sont des vecteurs complexes définis par les équations de MAXWELL (écrites en U.E.M. pour $\varepsilon = \varepsilon_0 = 0$, $\mu = 1$)

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\, H &= 4\pi\sigma E, & \mathrm{div}\, H &= 0, \\ -i\omega H &= \mathrm{rot}\, E, & \mathrm{div}\, E &= 0, \end{aligned} \tag{2-7}$$

en tous les points du sous-sol, autres que l'origine.

Dans l'air, mêmes équations avec $\sigma = 0$.

Ainsi qu'au chapitre I, on résout les équations générales au moyen d'un potentiel vecteur A [1]) dont le champ é.-m. se déduit par les relations — analogues à (1-8 a, b, c)

$$H = \mathrm{rot}\, A, \qquad E = -i\omega A + \frac{1}{4\pi\sigma}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, A,$$

$$\Delta A - \gamma^2 A = 0. \tag{2-8 a, b, c}$$

Dans l'air

$$\gamma^2 = 0, \qquad \Delta A = 0, \tag{2-9}$$

les composantes de A sont des fonctions harmoniques. La formule (2-8 b) n'est pas immédiatement applicable car — ainsi qu'on le montrera par la suite — nous avons en même temps

$$\mathrm{div}\, A = 0, \qquad \sigma = 0. \tag{2-9}$$

On peut lever l'indétermination en admettant d'abord que l'air possède une faible conductivité σ_0, le champ E étant calculé ultérieurement toujours par la formule (2-8 b), par le passage à la limite $\sigma_0 = 0$:

$$E = -i\omega A + \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{grad}\,\lim_{\sigma_0 = 0}\left(\frac{\mathrm{div}\, A}{\sigma_0}\right) \tag{2-10}$$

[1]) Pour le potentiel vecteur électrique, voir la note à la fin du Chapitre III.

Institutul Geologic al României

Une autre méthode sera présentée à l'occasion de l'étude de la composante normale E_z dans l'air (p. 40).

7. *Expressions intégrales du potentiel vecteur magnétique dans l'air et dans le sol.* Avec les nouvelles notations, vu que dans le cas quasistationnaire $\varepsilon_0 = \sigma_0 = 0$

$$k_0^2 = 0, \qquad k^2 = -\gamma^2 = -4\pi\sigma\omega i,$$

(2-11 a, b)

$$N = -\gamma^2\lambda, \qquad N' = \lambda + \sqrt{\lambda^2 + \gamma^2},$$

les formules S.-H. se réduisent à:

dans le sol ($z > 0$)

$$A_x = -\int_0^\infty \frac{2\lambda}{\lambda + R_1} e^{-R_1 z} J_0(\lambda r)\, d\lambda, \qquad A_y = 0,$$

(2-12 a, b)

$$A_z = -\cos\varphi \int_0^\infty \frac{2\lambda}{\lambda + R_1} e^{-R_1 z} J_1(\lambda r)\, d\lambda, \qquad R_1 = \sqrt{\lambda^2 + \gamma^2},$$

dans l'air ($z < 0$)

$$A_{x0} = -\int_0^\infty \frac{2\lambda}{\lambda + R_1} e^{\lambda z} J_0(\lambda r)\, d\lambda, \qquad A_{y0} = 0$$

(2-13 a, b)

$$A_{z0} = -\cos\varphi \int_0^\infty \frac{2\lambda}{\lambda + R_1} e^{\lambda z} J_1(\lambda r)\, d\lambda.$$

La validité de ces expressions est assurée du fait qu'elles constituent des cas particuliers des formules S.-H. générales. On peut toutefois vérifier directement que

a) Elles satisfont aux équations aux dérivées partielles (2-8) et (2-9), ce qui résulte de ce qu'elles sont construites additivement au moyen des solutions élémentaires bien connues

$$J_0(\lambda_2)\, e^{-R_1 z}, \qquad \cos\varphi\, J_1(\lambda r)\, e^{-R_1 z}, \qquad (z > 0)$$

$$J_0(\lambda r)\, e^{\lambda z}, \qquad \cos\varphi\, J_1(\lambda r)\, e^{\lambda z}, \qquad (z < 0)$$

de ces mêmes équations.

Institutul Geologic al României

b) Au voisinage de l'origine, on peut montrer que — dans le sol

$$A_x \sim -\frac{I}{R}, \qquad A_z \sim -\frac{x}{R(R+z)},$$

et dans l'air

$$A_{x0} \sim -\frac{I}{R}, \qquad A_z \sim -\frac{x}{R(R-z)}.$$

Ceci signifie qu'à petite distance de l'émetteur, le dipôle alternatif produit un champ en phase avec le courant du câble, champ qui peut être calculé au moyen des expressions établies pour le courant continu [19, p. 36] dans le cas d'un dipôle de puissance unitaire.

c) En calculant le champ électromagnétique au moyen des égalités (2-8), on vérifie la continuité à la surface du sol des composantes du champ magnétique et du potentiel vecteur, en conformité avec les conditions maxwelliennes de passage du champ é.-m. d'un milieu dans l'autre. L'indétermination apparente des composantes électriques dans l'air sera élucidée au paragraphe 9.

Sous la forme (2-12) et (2-13) les composantes du potentiel vecteur ainsi que les grandeurs électromagnétiques dérivées sont difficilement accessibles au calcul numérique. C'est à R. M. Foster et à V. Fock (loc. cit.) que revient le mérite d'avoir montré que les intégrales (2-12 a) et (2-12 b) — concernant les points du sol et de la surface — sont *directement exprimables au moyen des exponentielles et des fonctions cylindriques.* Attendu que ces deux savants auteurs se sont bornés dans leurs travaux à des indications sommaires à ce sujet, nous avons pensé qu'il pouvait être utile — pour l'objet particulier de la prospection électrique — de compléter leurs études en donnant les expressions mathématiques exactes de toutes les composantes électromagnétiques, tant à la surface qu'à l'intérieur de la terre.

Institutul Geologic al României

8. *Expressions en termes finis des composantes du p. v. dans le sol.* — Le point central du travail de R. M. FOSTER est constitué par les deux identités fondamentales

$$(2\text{-}14)\qquad \int_0^\infty \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\gamma^2}} e^{-z\sqrt{\lambda^2+\gamma^2}} J_0(\lambda r)\, d\lambda = \frac{e^{-\gamma R}}{R} = P, \qquad (R = \sqrt{r^2+z^2})$$

$$(2\text{-}15)\qquad \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\gamma^2}} e^{-z\sqrt{\lambda^2+\gamma^2}} J_0(\lambda r)\, d\lambda = I_0\left[\frac{\gamma}{2}(R-z)\right] K_0\left[\frac{\gamma}{2}(R+z)\right] = Q,$$

où l'on a désigné, pour la commodité des calculs ultérieurs, par P et Q les fonctions qui figurent au deuxième membre de ces identités.

Il est facile d'exprimer les composantes du potentiel vecteur dans le sol, (2-12 a) et (2-12 b), au moyen des fonctions P et Q. On a

$$\begin{aligned} A_x &= -\int_0^\infty \frac{2\lambda}{\lambda+R_1} e^{-R_1 z} J_0(\lambda r)\, d\lambda \qquad (R_1 = \sqrt{\lambda^2+\gamma^2}) \\ &= -\int_0^\infty \frac{2\lambda(\lambda-R_1)}{\lambda^2-R_1^2} e^{-R_1 z} J_0(\lambda r)\, d\lambda \\ &= \frac{2}{\gamma^2}\int_0^\infty [\lambda^2+\gamma^2-\gamma^2-\lambda R_1]\, e^{-R_1 z} J_0(\lambda r)\, d\lambda \\ &= \frac{2}{\gamma^2}\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\gamma^2\right)\int_0^\infty e^{-R_1 z} J_0(\lambda r)\, d\lambda + \frac{\partial}{\partial z}\int_0^\infty \lambda\, e^{-R_1 z} J_0(\lambda r)\, d\lambda\right\} \\ &= -\frac{2}{\gamma^2}\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\gamma^2\right)\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right\}. \qquad (2\text{-}16) \end{aligned}$$

Institutul Geologic al României

$$A_z = -\cos\varphi \int_0^\infty \frac{2\lambda}{\lambda+R_1} e^{-R_1 z} J_1(\lambda r)\, d\lambda$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \frac{2}{\lambda+R_1} e^{-R_1 z} J_0(\lambda r)\, d\lambda$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \frac{2(\lambda-R_1)}{\lambda^2-R_1^2} e^{-R_1 z} J_0(\lambda r)\, d\lambda$$

$$= -\frac{2}{\gamma^2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty (\lambda-R_1)\, e^{-R_1 z} J_0(\lambda r)\, d\lambda$$

$$= \frac{2}{\gamma^2}\frac{\partial^2}{\partial x\, dz}\left\{P + \frac{\partial Q}{\partial z}\right\}. \tag{2-17}$$

Il suffit dès lors — pour achever le problème — de remplacer dans (2-16) et (2-17) les dérivées de P et Q par leurs expressions effectives en fonction des coordonnées.

Le calcul des dérivées ne présente aucune difficulté théorique spéciale, mais il est préférable — à cause de sa longueur — d'y introduire des notations abrégées. A cet effet, nous remarquerons que, par suite des relations (2-5) entre les fonctions cylindriques, les fonctions de BESSEL qui figurent dans les dérivées de Q portent toujours sur l'argument $\frac{\gamma}{2}(R-z)$ tandisque les fonctions de HANKEL ont constamment l'argument $\frac{\gamma}{2}(R+z)$. Eu égard à cette circonstance, nous écrirons simplement

$$I_0\left[\frac{\gamma}{2}(R-z)\right] = I_0, \qquad I_1\left[\frac{\gamma}{2}(R-z)\right] = I_1,$$

$$K_0\left[\frac{\gamma}{2}(R+z)\right] = K_0, \qquad K_1\left[\frac{\gamma}{2}(R+z)\right] = K_1, \tag{2-18}$$

dans toute la suite de ce travail.

Institutul Geologic al României

Avec ces notations, on trouve sans difficulté — en faisant constamment usage des relations

$$(2\text{-}19)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(I_0 K_0) = \dfrac{\gamma}{2} x R^{-1} (I_1 K_0 - I_0 K_1), \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(I_0 K_0) = -\dfrac{\gamma}{2}\left\{ (1 - zR^{-1}) I_1 K_0 + (1 + zR^{-1}) I_0 K_1 \right\}, \end{cases}$$

$$(2\text{-}20)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(I_0 K_1) = \dfrac{\gamma}{2} x R^{-1} (I_1 K_1 - I_0 K_0) - x R^{-1} r^{-2} (R - z) I_0 K_1, \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(I_0 K_1) = -\dfrac{\gamma}{2}\left\{ (1 - zR^{-1}) I_1 K_1 - (1 + zR^{-1}) I_0 K_0 \right\} - \dfrac{1}{R} I_0 K_1, \end{cases}$$

$$(2\text{-}21)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(I_1 K_0) = \dfrac{\gamma}{2} x R^{-1} (I_0 K_0 - I_1 K_1) - x R^{-1} r^{-2} (R + z) I_1 K_0, \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(I_1 K_0) = -\dfrac{\gamma}{2}\left\{ (1 + zR^{-1}) I_1 K_1 + (1 - zR^{-1}) I_0 K_0 \right\} + \dfrac{1}{R} I_1 K_0, \end{cases}$$

$$(2\text{-}22)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(I_1 K_1) = \dfrac{\gamma}{2} x R^{-1} (I_0 K_1 - I_1 K_0) - 2 x r^{-2} I_1 K_1, \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(I_1 K_1) = -\dfrac{\gamma}{2}\left\{ (1 - zR^{-1}) I_0 K_1 + (1 + zR^{-1}) I_1 K_0 \right\}, \end{cases}$$

lesquelles sont des conséquences immédiates des identités (2-5), les dérivées de la fonction Q qui figurent dans A_x et A_z :

$$(2\text{-}23)\quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{\gamma}{2}\left\{ (1 + zR^{-1}) I_0 K_1 + (1 - zR^{-1}) I_1 K_0 \right\},$$

$$(2\text{-}24)\quad \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = \frac{\gamma^2}{2}(1 + z^2 R^{-2}) I_0 K_0 + \frac{\gamma}{2} z R^{-3} (z + R) I_0 K_1 + \frac{\gamma}{2} z R^{-3} (R - z) I_1 K_0 + \frac{\gamma^2}{2} r^2 R^{-2} I_1 K_1,$$

$$(2\text{-}25)\quad \frac{2}{\gamma^2}\frac{\partial^3 Q}{\partial z^2 \partial x} = -3 x z^2 R^{-4} I_0 K_0 - x z R^{-3} [\gamma z + 3\gamma^{-1} R^{-1} + 3\gamma^{-1} z R^{-2}] I_0 K_1 + x z R^{-3} [\gamma z - 3\gamma^{-1} R^{-1} + 3\gamma^{-1} z R^{-2}] I_1 K_0 + x R^{-4} (3z^2 - 2R^2) I_1 K_1,$$

Institutul Geologic al României

$$(2\text{-}26)\quad \frac{2}{\gamma^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}-\gamma^2 Q\right\}=zR^{-4}(R^2-3z^2)\,I_0K_0$$
$$+[\ \gamma r^2 zR^{-3}+\gamma^{-1}R^{-5}(R^2-3z^2)(R+z)]\,I_0K_1)$$
$$+[-\gamma r^2 zR^{-3}+\gamma^{-1}R^{-5}(R^2-3z^2)(R-z)]\,I_1K_0$$
$$-3r^2zR^{-4}\,I_1K_1\,.$$

On a d'ailleurs aussi

$$(2\text{-}27)\qquad \frac{\partial P}{\partial z}=-zR^{-3}(1+\gamma R)\,e^{-\gamma R},$$

$$(2\text{-}28)\quad \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=[3z^2-R^2+\gamma R(3z^2-R^2)+\gamma^2R^2z^2]\,R^{-5}\,e^{-\gamma R},$$

$$(2\text{-}29)\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial z}=xz(3+3\gamma R+\gamma^2R^2)\,R^{-5}\,e^{-\gamma R}.$$

Finalement, on obtient pour expressions exactes des composantes non-nulles du potentiel vecteur dans le sol

$$(2\text{-}30)\quad \begin{aligned}A_x &= zR^{-4}(3z^2-R^2)\,I_0K_0\\ &-[\gamma r^2zR^{-3}+\gamma^{-1}R^{-5}(R^2-3z^2)(R+z)]\,I_0K_1\\ &+[\gamma r^2zR^{-3}-\gamma^{-1}R^{-5}(R^2-3z^2)(R-z)]\,I_1K_0\\ &+3r^2zR^{-4}I_1K_1\\ &+2\gamma^{-2}R^{-5}[(R^2-3z^2)(1+\gamma R)-\gamma^2R^2z^2]\,e^{-\gamma R}\end{aligned}$$

$$(2\text{-}31)\quad \begin{aligned}A_z &= -3xz^2R^{-4}\,I_0K_0\\ &-xzR^{-3}[\gamma z+3\gamma^{-1}R^{-1}+3\gamma^{-1}zR^{-2}]\,I_0K_1\\ &+xzR^{-3}[\gamma z-3\gamma^{-1}R^{-1}+3\gamma^{-1}zR^{-2}]\,I_1K_0\\ &+x(3z^2-2R^2)R^{-4}\,I_1K_1\\ &+2\gamma^{-2}xzR^{-5}(3+3\gamma R+\gamma^2R^2)\,e^{-\gamma R}\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que ces expressions de A_x et A_z satisfont toutes les conditions du problème posé.

a) Étant des fonctions linéaires à coefficients constants des dérivées partielles de P et Q, elles sont — ainsi que P et Q — des solutions de l'équation de propagation (2-8 c).

Institutul Geologic al României

b) Au voisinage de l'origine (petites valeurs de r) on peut utiliser pour les fonctions de BESSEL et de HANKEL les formules approchées — valables pour les petites valeurs de x —

$$I_0(x) \sim 1 + \frac{x^2}{4}, \qquad I_1(x) \sim \frac{x}{2},$$

$$K_0(x) \sim \operatorname{Ln}\frac{2}{\alpha x}, \qquad \left(\operatorname{Ln}\frac{2}{\alpha} = 0{,}11593\right)$$

$$K_1(x) \sim \frac{1}{x} + \frac{x}{2}\operatorname{Ln}\frac{\alpha x}{2} - \frac{x}{4}.$$

Appliquées à notre cas, ces formules donnent

$$I_0K_0 \sim \operatorname{Ln}\frac{4}{\alpha\gamma(R+z)},$$

$$(2\text{-}33)\quad I_0K_1 \sim \frac{2}{\gamma(R+z)} + \frac{\gamma}{4}(R+z)\operatorname{Ln}\frac{\alpha\gamma}{4}(R+z) - \frac{\gamma}{2}\frac{Rz}{R+z},$$

$$I_1K_0 \sim \frac{\gamma}{4}(R-z)\operatorname{Ln}\frac{4}{\alpha\gamma(R+z)}, \qquad I_1K_1 \sim \frac{1}{2}\cdot\frac{R-z}{R+z}.$$

Si l'on porte ces expressions dans (2-30) et (2-31) et si l'on ne conserve que les termes en R à croissance égale ou supérieure à R^{-1}, on trouve bien pour A_x et A_z les valeurs du courant continu [cf. p. (27)].

c) Pour le grandes valeurs absolues de leur argument, les fonctions de BESSEL et de HANKEL admettent les expressions asymptotiques

$$(2\text{-}34)\quad I_0(x) \sim I_1(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \qquad K_0(x) \sim K_1(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}.$$

Si donc — dans notre cas — on se déplace à partir de l'origine suivant un rayon qui fait un angle θ avec l'axe oz $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$, pour les valeurs suffisamment grandes de R

Institutul Geologic al României

$$I_0 \sim I_1 \sim \frac{e^{\frac{\gamma}{2}(R-z)}}{\sqrt{\pi\gamma(R-z)}}, \quad K_0 \sim K_1 \sim \sqrt{\pi}\,\frac{e^{-\frac{\gamma}{2}(R+z)}}{\sqrt{\gamma(R+z)}},$$

(2-35)

$$I_0K_0 \sim I_0K_1 \sim I_1K_0 \sim I_1K_1 \sim \frac{e^{-\gamma z}}{\gamma r}$$

Si l'on porte ces expressions dans (2-30) et (2-31) et si l'on néglige le terme qui provient de P, — lequel a une décroissance exponentielle en $e^{-\gamma R}$, donc plus rapide que $e^{-\gamma z}$ — on obtient pour A_x et A_z les formules asymptotiques

(2-36) $$A_x \sim 2\gamma^{-2} r^{-1} R^{-2} [3z^2 R^{-2} - 1 + \gamma z]\, e^{-\gamma z},$$

(2-37) $$A_z \sim -2\gamma^{-2} xr^{-1} R^{-3} [3zR^{-1} + \gamma R]\, e^{-\gamma z}.$$

Sur tout rayon partant de l'origine — à θ compris entre o et $\frac{\pi}{2}$ le potentiel vecteur decroît donc d'une manière exponentielle. L'exponentielle ne dépend d'ailleurs que de z; on voit déjà apparaître le skin-effect.

d) A la surface du sol ($z = o$) les expressions de A_x et A_z se simplifient notablement. En vertu de (2-4) on a ici-avec $r = R$—

(2-38) $$I_0K_1 + I_1K_0 = 2\gamma^{-1} r^{-1}$$

et par suite

(2-39) $$A_x = -2\gamma^{-2} r^{-3} [1 - (1 + \gamma r)\, e^{-\gamma r}],$$

(2-40) $$A_z = -2xr^{-2} I_1K_1.$$

A petite distance de l'origine, on trouve par application de (2-33)

(2-41) $$A_x \sim -r^{-1}, \qquad A_z \sim -xr^{-2},$$

— valeurs de courant continu.

A grande distance, on a une décroissance en r^{-3} pour A_x et r^{-2} pour A_z

(2-42) $$A_x \sim -2\gamma^{-2} r^{-3}, \qquad A_z \sim -2\gamma^{-1} xr^{-3},$$

en conformité avec les formules (2-36) et (2-37), étendues au cas $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ainsi *la composante verticale du potentiel vecteur devient dominante* lorsqu'on s'éloigne beaucoup de l'émetteur, résultat bien connu en T.S.F.

Institutul Geologic al României

e) Pour le calcul ultérieur des composantes de E au moyen de la formule générale (2-8 b), il est nécessaire de connaître au préalable l'expression de la *divergence du potentiel vecteur*. Ainsi qu'on le constate par l'emploi des expressions (2-16) et (2-17) de A_x et A_z, celle-ci ne dépend que de la fonction Q

$$\text{(2-43)} \qquad \operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 2\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z}.$$

Le calcul complet — au moyen des relations (2-19, 20, 21, 22) — donne

$$\text{(2-44)} \quad \operatorname{div} A = \gamma^2 xz\, R^{-2}\,(I_0K_0 - I_1K_1) + \gamma x\, R^{-2}\,[(1 + z\,R^{-1})\,I_0K_1 + (1 - z\,R^{-1})\,I_1K_0].$$

Pour $z = 0$ — surface du sol — on a simplement

$$\text{(2-45)} \qquad \operatorname{div} A = \gamma x\, r^{-2}\,[I_0K_1 + I_1K_0] = 2x\, r^{-3},$$

expression identique à celle du cas stationnaire.

9. *Champ électrique à la surface du sol.* — A cause de l'importance pratique des valeurs prises à la surface du sol par les composantes du champ é.-m., nous présenterons une étude particulièrement détaillée de ces quantités.

E_x — parallèle au dipôle — se déduit immédiatement de (2-39) et (2-45)

$$\begin{aligned} E_x &= -i\omega A_x + \frac{1}{4\pi\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div} A) \\ &= 2\,i\omega\gamma^{-2}\,r^{-3}\,[1 - (1+\gamma r)\,e^{-\gamma r}] + \frac{1}{2\pi\sigma}\cdot r^{-3}\,(1 - 3\,x^2 r^{-2}) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma}\,r^{-3}\,[2 - 3x^2 r^{-2} - (1+\gamma r)\,e^{-\gamma r}]. \end{aligned} \qquad \text{(2-46)}$$

Par suite de l'absence de la composante A_y dans le potentiel vecteur, E_y — composante perpendiculaire au dipôle — *se réduit à sa valeur du cas stationnaire*

$$\text{(2-47)} \qquad E_y = \frac{1}{4\pi\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div} A) = -\frac{1}{2\pi\sigma}\cdot 3xy\, r^{-5}.$$

Institutul Geologic al României

Cette dernière propriété, signalée déjà par FOSTER (loc. cit.) et nous-même ([8], p. 34) est remarquable et peut avoir des conséquences utiles pour l'application de la *méthode des résistivités en courant alternatif*. Elle subsiste en effet si — en alignant en série des dipôles de même phase — on passe au cas pratique de l'émetteur rectiligne de longueur finie: la composante électrique perpendiculaire à la direction de l'émetteur reste en phase avec le courant qui parcourt celui-ci. Or, on sait qu'il existe des appareils (Siemens, Evershed-Vignoles, etc.) qui font usage du courant alternatif pour l'application de la méthode du quadrupôle, suivant le principe établi en courant continu. En dernière analyse, celui-ci consiste à opposer la différence de potentiel, déterminée entre deux prises de terre par le passage du courant dans le sol, à une d.d.p. proportionnelle à l'intensité de ce courant. En régime alternatif, la composante E_x — utilisée pour la compensation dans la méthode quadrupôle — a nécessairement un certain déphasage par rapport au courant de l'émetteur — ainsi que cela se voit sur la formule (2-46) pour le cas du dipôle. Dès que les dispositifs sont allongés en vue d'une exploration profonde — ce déphasage devra apparaître, entraînant une compensation imparfaite dans l'appareil de zéro et, par suite, une incertitude dans la mesure de la résistivité apparente. Cet inconvénient ne serait plus à redouter si, au prix d'une légère complication expérimentale, on prendrait la ligne CD des électrodes de potentiel perpendiculaire à la direction de l'émetteur AB (Fig. 1). Avec — par exemple — $AB = BC = CD = a$ et un courant I dans le câble AB, on aurait entre C et D la différence de potentiel

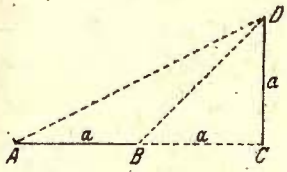

Fig. 1.

$$\Delta V = \frac{\rho_a I}{2\pi}\left(\frac{1}{BC} - \frac{1}{AC} - \frac{1}{BD} + \frac{1}{AD}\right)$$

(2-48)

$$= \frac{\rho_a I}{2\pi a}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0{,}2401\,\frac{\rho_a I}{2\pi a}.$$

Institutul Geologic al României

d'où la résistivité apparente

$$\rho_a = 26,169 \cdot \frac{a}{I} \Delta V. \tag{2-49}$$

La théorie qui précède suppose le terrain homogène; l'expérience seule peut décider si l'avantage signalé subsiste — au moins d'une manière approchée — lorsque le sous-sol est hétérogène.

Revenant au champ électrique du dipôle, nous remarquerons que les composantes en coordonnées cylindriques r, φ sont

$$\begin{aligned} E_r &= E_x \cos\varphi + E_y \sin\varphi = E_{rc} \cdot e_r, \\ E_\varphi &= -E_x \sin\varphi + E_y \cos\varphi = E_{\varphi c} \cdot e_\varphi, \end{aligned} \tag{2-50}$$

où l'on a designé par E_{rc} et $E_{\varphi c}$ les mêmes composantes — radiale et tangentielle — dans le cas du courant continu (cf. [19], p. 30).

$$E_{rc} = -\frac{1}{\pi\sigma} \cdot \frac{\cos\varphi}{r^3}, \qquad E_{\varphi c} = -\frac{1}{2\pi\sigma} \cdot \frac{\sin\varphi}{r^3} \tag{2-51}$$

et par e_r et e_φ des *facteurs de courant alternatif*, ne dépendant que de γr et ayant la dimension zéro

$$e_r = \frac{1}{2}[1 + (1 + \gamma r)\, e^{-\gamma r}], \tag{2-52}$$

$$e_\varphi = 2 - (1 + \gamma r)\, e^{-\gamma r}, \tag{2-53}$$

$$2 e_r + e_\varphi = 3. \tag{2-54}$$

Ces facteurs — représentés par leurs vecteurs complexes dans la figure 2, en fonction de la *distance numérique*

$$u = \frac{|\gamma|}{2} r = \sqrt{\pi\sigma\omega} \cdot r \tag{2-55}$$

—, étant indépendants de l'azimut φ, permettent de condenser dans les deux courbes correspondantes de la figure indiquée toutes les propriétés du champ E. On voit ainsi que, d'une manière générale, le champ électrique du dipôle alternatif est — en intensité — *du même ordre de grandeur* que le champ du dipôle continu ayant une puissance d'égale amplitude.

Institutul Geologic al României

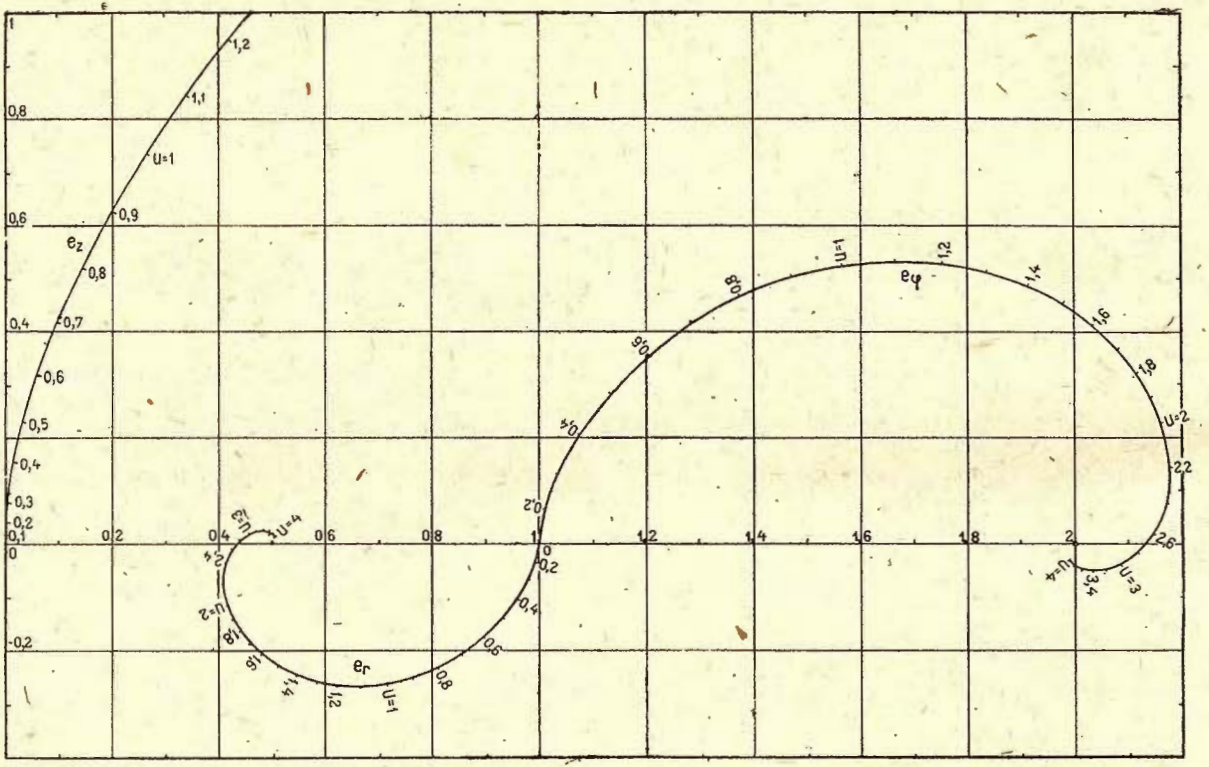

Fig. 2. — Diagrammes complexes des facteurs électriques de courant alternatif e_r, e_φ, e_z en fonction de la distance numérique $u = |\gamma| r/2$.

IGR Institutul Geologic al României

A grande distance, la composante tangentielle devient double, la composante radiale la moitié de la grandeur correspondante du c. continu. Les déphasages, plus considérables à distance numérique relativement faible, disparaissent sur une certaine suite de cercles — dont le premier a pour rayon environ $u = 2{,}7$ — définis par

$$\text{Im}\, e_r = \text{Im}\, e_\varphi = 0 \; ; \qquad (\text{Im} = \text{partie imaginaire}) \tag{2-56}$$

sur ces cercles le champ électrique est donc complètement polarisé.

De même, les déphasages s'annulent à grande distance numérique. Grosso modo, le champ alternatif est plus intense que le champ continu dans la direction oy, perpendiculaire au dipôle, moins intense sur le prolongement ox de l'émetteur.

En général, l'extrémité du vecteur électrique en un point donné décrit — au cours d'une alternance du courant — une ellipse dont les différents éléments sont accessibles aux déterminations expérimentales. Ainsi, M. v. LUDWIGER [20] a pu tracer — à la suite des mesures effectuées autour d'un émetteur très court (25 m.) sur un terrain considéré comme homogène — des lignes d'égale ellipsité (ellipsité = rapport des longueurs des axes), des lignes d'égal grand axe et des lignes d'égal déphasage du grand axe de l'ellipse électrique. Ses résultats, sur lesquels nous reviendrons plus en détail dans la suite, nous ont incité à présenter ici le tableau des mêmes quantités calculées à partir des expressions théoriques (2-50), ce qui permettra une confrontation immédiate avec les faits d'expérience. Nous nous bornerons dans ce qui suit à rappeler le principe de ces calculs élémentaires, dont on retrouvera plus loin l'analogue exact pour l'ellipse des composantes magnétiques horizontales.

Si, dans un système d'axes rectangulaires or, $o\varphi$ les composantes complexes d'un vecteur alternatif V sont

$$V_r = p + iq\,, \qquad V_\varphi = P + iQ\,, \tag{2-57}$$

Institutul Geologic al României

leur expression en fonction du temps est

(2-58) $V_r = p\cos\omega t - q\sin\omega t, \quad V_\varphi = P\cos\omega t - Q\sin\omega t.$

Le carré du grand (petit) axe de l'ellipse décrite par l'extrémité du vecteur V est le maximum (minimum) du carré de la longueur de ce vecteur

(2-59)

$$V_r^2 + V_\varphi^2 = \frac{1}{1+w^2}[P^2 + p^2 - 2(PQ + pq)w + (Q^2 + q^2)w^2]$$

$$(w = \operatorname{tg}\omega t)$$

Ce maximum (minimum) a lieu au temps t défini par

(2-60) $$\operatorname{tg} 2\omega t = \frac{2(PQ + pq)}{Q^2 + q^2 - P^2 - p^2}$$

et sa valeur est

(2-61)

$$\frac{M}{m} = \sqrt{\frac{1}{2}(p^2+q^2+P^2+Q^2) \pm \sqrt{(p^2+q^2+P^2+Q^2)^2 - (Pq-Qp)^2}}.$$

Si — au lieu de t — on prend comme paramètre auxiliaire l'angle α de l'inclinaison instantanée du vecteur V sur l'axe or:

(2-62) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{V_\varphi}{V_r} = \frac{P - Qw}{p - qw}$$

on trouve que le maximum (minimum) a lieu pour

(2-63) $$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(pP + qQ)}{p^2 + q^2 - P^2 - Q^2},$$

équation qui définit la direction des axes de l'ellipse. Enfin l'ellipsité g, rapport du petit axe au grand axe, se calcule facilement en posant

(2-64) $$g = \operatorname{tg}\frac{\mu}{2}, \qquad \sin\mu = \frac{2(Pq - Qp)}{P^2 + Q^2 + p^2 + q^2}.$$

Dans le cas du dipôle, les quantités p, q, P, Q dépendent d'une manière simple de l'azimut φ, tandis que leur relation avec r

Institutul Geologic al României

est beaucoup plus complexe. Ainsi, par exemple, pour le champ électrique, on peut poser

$$(2\text{-}65) \qquad e_r = p_0 + iq_0, \qquad e_\varphi = P_0 + iQ_0,$$

p_0, q_0, P_0, Q_0 étant uniquement fonctions de r. Si l'on désigne par E_g un facteur réel défini par

$$(2\text{-}66\,a) \qquad E_g = -\frac{1}{2\pi\sigma}\cdot\frac{1}{r^3},$$

on : [cf. 2-50, 51]

$$(2\text{-}66\,b,c) \quad E_r = 2E_g(p_0+iq_0)\cos\varphi, \quad E_\varphi = E_g(P_0+iQ_0)\sin\varphi$$

et les formules générales précédentes sont immédiatement applicables si l'on prend

$$(2\text{-}67) \qquad \begin{aligned} p &= E_g \cdot 2p_0\cos\varphi, & q &= E_g \cdot 2q_0\cos\varphi, \\ P &= E_g \cdot P_0\sin\varphi, & Q &= E_g \cdot Q_0\sin\varphi. \end{aligned}$$

On trouve ainsi pour toutes les quantités précitées, des variations à allure simple le long des cercles $u = \text{const.}$

Pour les *ellipsités* g du champ électrique horizontal on a

$$2\text{-}68) \quad \sin\mu = \frac{2g}{1+g^2} = \frac{4(P_0q_0 - Q_0p_0)\,\tau}{(P_0^2+Q_0^2)\,\tau^2 + 4(p_0^2+q_0^2)}, \quad (\tau = \operatorname{tg}\varphi).$$

Le maximum de g, donc de $\sin\mu$, sur un cercle $u = \text{const.}$ a lieu pour

$$(2\text{-}69) \qquad \tau = 2\sqrt{\frac{p_0^2+q_0^2}{P_0^2+Q_0^2}}.$$

Sur un tel cercle la tangente de l'azimut du maximum d'ellipsité est donc égale au double du rapport des modules $|e_r|$ et $|e_\varphi|$. D'après (2-63), cet azimut est aussi celui où les axes de l'ellipse électrique font des angles de $\frac{\pi}{4}$ avec le rayon à l'origine. Quant à la valeur de ce maximum, on vérifie facilement qu'il est égal à $\operatorname{tg}\frac{\beta-\delta}{2}$, où β et δ désignent les angles de phase de e_r et e_φ.

Institutul Geologic al României

La figure 3 présente les lignes d'égale ellipsité — obtenues par interpolation graphique. Ce sont des courbes toujours fermées, situées à l'intérieur des zones délimitées par les axes et les cercles de concordance de phase (2-56). Le maximum absolu de l'ellipsité a lieu dans la première zone ($u < 2,7$) et est égal à environ 0,36, pour l'azimut $\varphi \sim 38^0$. Les valeurs maxima de g dans les autres zones sont très faibles et décroissent d'ailleurs lorsque u croît. Pratiquement, on peut considérer que le champ électrique est en phase avec le courant de l'émetteur dès que $u > 2,7$.

Les lignes d'égale valeur maxima du champ électrique horizontal — multipliée par un coefficient constant approprié, nécessaire au rétablissement de l'homogénéité — sont tracées dans la figure 4. Remarquer l'allongement des lignes suivant oy.

Ainsi qu'on l'a vu précédemment, les composantes électriques horizontales à la surface du sol présentent la particularité d'être exprimables au moyen des fonction analytiques élémentaires. Il n'en est pas de même de la *composante verticale* E_z, dont la valeur en tout point de la surface est définie par des fonctions cylindriques. Il s'agit ici, évidemment, de la composante E_z du côté de l'air, puisque à l'intérieur du sol et au voisinage immédiat de la surface, E_z est identiquement nulle.

Dans l'air (cf. 2-10)

$$(2\text{-}70) \qquad E_z = -i\omega A_x + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\lim_{\sigma_0=0}\left(\frac{\operatorname{div} A}{\sigma_0}\right),$$

où l'on désigne provisoirement par σ_0 une conductivité très faible de l'air que l'on fera tendre vers zéro en même temps que div A.

Or, à la surface du sol, le terme indéterminé de (2-70) a une valeur imposée par la continuité des grandeurs E_x, E_y, A_z pour $z = 0$ [cf. (2-45)]

$$\left(\frac{\operatorname{div} A}{\sigma_0}\right)^{air}_{\sigma_0=0} = \left(\frac{\operatorname{div} A}{\sigma}\right)^{sol} = \frac{2}{\sigma} x r^{-3}$$

et le prolongement harmonique de cette quantité dans l'air

Institutul Geologic al României

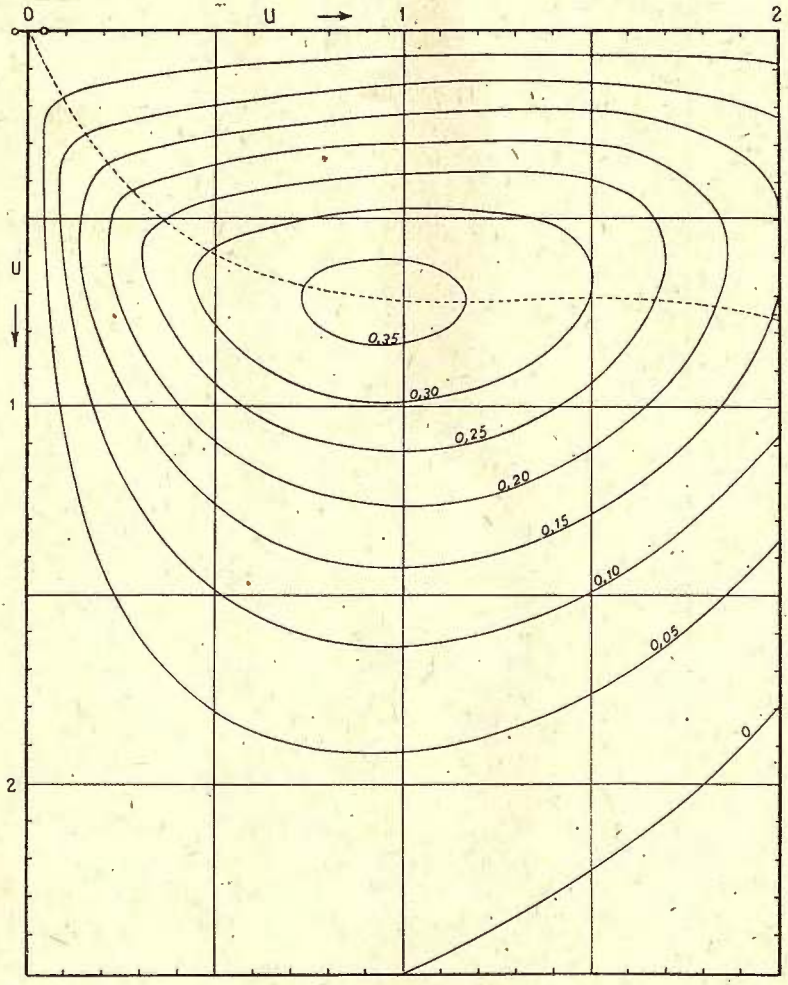

Fig. 3. — Lignes d'égal rapport des axes (ellipsité) de l'ellipse de polarisation électrique horizontale.

. . . Lieu des maximums d'ellipsité sur les cercles u = const.

INSTITUTUL GEOLOGIC - BIBLIOTECA

Institutul Geologic al României

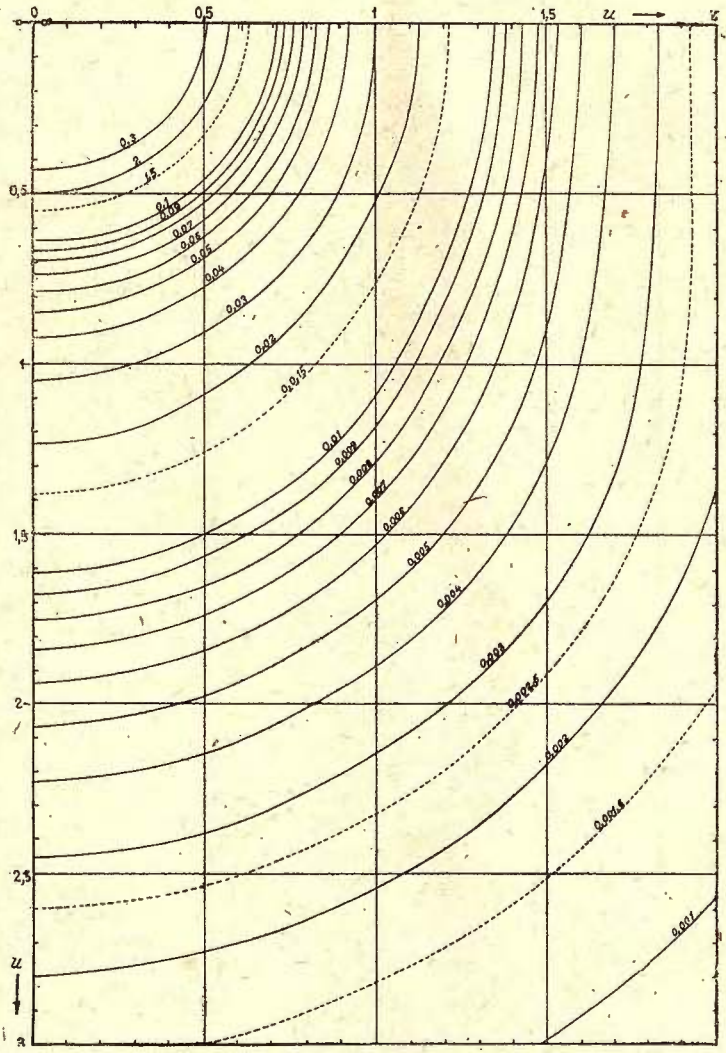

Fig. 4. — Lignes d'égale valeur du maximum M_e de la composante électrique horizontale. Sur les lignes sont inscrites les valeurs des quantités $|\gamma|^{-3} \sigma M_e$.

INSTITUTUL GEOL
Institutul Geologic al României

est évidemment

$$\left(\frac{\operatorname{div} A}{\sigma_0}\right)_{\sigma_0=0} = \frac{2}{\sigma} x\, R^{-3}. \tag{2-71}$$

On vérifie de suite que le terme correspondant de (2-70) est nul pour $z = 0$, et l'on a simplement (à la surface du sol)

$$E_z = -i\omega A_z \tag{2-72}$$

ou, en vertu de (2-40)

$$E_z = 2i\omega \cos\varphi\, r^{-1} I_1 K_1. \tag{2-73}$$

Lorsqu'on s'approche de l'origine, par suite de (2-41)

$$E_z \sim i\omega \cos\varphi \,.\, r^{-1}, \tag{2-74}$$

E_z croît plus lentement que les deux autres composantes du vecteur électrique et arrive à être négligeable par rapport à elles; le champ électrique devient horizontal, pareil à celui du cas stationnaire.

Par contre, à grande distance numérique, en vertu de (2-35),

$$E_z \sim 2i\omega \gamma^{-1} \cos\varphi\, r^{-2} \tag{2-75}$$

décroît plus lentement que les composantes horizontales; le champ électrique se réduit peu à peu à sa projection verticale, phénomène caractéristique de l'état variable envisagé.

Dans le diagramme vectoriel de la figure 2, E_z a été représenté par son rapport e_z à la composante radiale E_{rc} du cas stationnaire (en courant continu E_{zc}, étant nulle, ne peut pas servir comme terme de comparaison). On pose

$$E_z = E_{rc} \,.\, e_z\,, \qquad e_z = -\frac{1}{4}\gamma^2 r^2 I_1\left(\frac{\gamma}{2} r\right) K_1\left(\frac{\gamma}{2} r\right), \tag{2-76}$$

ce qui permet encore de synthétiser sa variation par une courbe unique.

En prospection électrique, si l'on excepte les mesures effectuées avec les fréquences très élevées de la Radioélectricité, cette composante verticale ne semble pas avoir fait l'objet d'investigations suivies; vu sa faible atténuation en fonction de la distance, il serait intéressant que de pareilles mesures fussent également entreprises au moyen des basses fréquences des méthodes géoélectriques ordinaires.

Institutul Geologic al României

La tableau numérique I donne la partie réelle et la partie imaginaire des quantités e_r, e_φ, e_z pour des valeurs de u comprises entre o et 4.

TABLEAU I

Partie réelle et partie imaginaire des facteurs électriques de courant alternatif e_r, e_φ, e_z.

u	e_r		e_φ		e_z	
	Re.	Im.	Re.	Im.	Re.	Im.
o	1,000	o	1,000	o	o	o
0,1	0,999	—0,009	1,002	0,018	0,0001	—0,010
0,2	0,994	—0,033	1,012	0,065	—0,0016	—0,039
0,3	0,982	—0,065	1,037	0,131	—0,006	—0,087
0,4	0,961	—0,103	1,077	0,205	—0,017	—0,151
0,5	0,933	—0,141	1,134	0,282	—0,035	—0,229
0,6	0,898	—0,177	1,204	0,354	—0,061	—0,318
0,7	0,857	—0,208	1,287	0,416	—0,097	—0,416
0,8	0,811	—0,233	1,377	0,467	—0,143	—0,519
0,9	0,764	—0,252	1,472	0,504	—0,199	—0,626
1	0,716	—0,263	1,569	0,526	—0,264	—0,735
1,1	0,668	—0,267	1,664	0,534	—0,337	—0,843
1,2	0,623	—0,265	1,754	0,529	—0,418	—0,949
1,3	0,581	—0,256	1,837	0,513	—0,505	—1,052
1,4	0,544	—0,243	1,913	0,486	—0,597	—1,151
1,5	0,510	—0,226	1,979	0,452	—0,693	—1,246
1,6	0,482	—0,206	2,035	0,412	—0,792	—1,336
1,7	0,459	—0,184	2,082	0,368	—0,892	—1,421
1,8	0,441	—0,161	2,116	0,321	—0,993	—1,501
1,9	0,427	—0,137	2,145	0,275	—1,093	—1,577
2	0,418	—0,114	2,164	0,228	—1,192	—1,649
2,2	0,411	—0,072	2,179	0,144	—1,385	—1,783
2,4	0,414	—0,037	2,171	0,073	—1,570	—1,908
2,6	0,425	—0,010	2,149	0,020	—1,744	—2,026
2,8	0,440	0,009	2,120	—0,017	—1,909	—2,143
3	0,456	0,020	2,088	—0,040	—2,067	—2,261
3,2	0,470	0,025	2,059	—0,050	—2,216	—2,381
3,4	0,483	0,025	2,035	—0,051	—2,360	—2,503
3,6	0,492	0,023	2,015	—0,046	—2,502	—2,629
3,8	0,499	0,019	2,002	—0,038	—2,642	—2,760
4	0,504	0,015	1,993	—0,030	—2,782	—2,893

Institutul Geologic al României

10. *Champ magnétique à la surface du sol.*—Par opposition avec le vecteur électrique, c'est la composante magnétique *verticale* qui s'exprime au moyen d'exponentielles:

$$(2\text{-}77)\quad H_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y} = 2 \sin\varphi\, \gamma^{-2} r^{-4} [(3+3\gamma r+\gamma^2 r^2)\, e^{-\gamma r} - 3],$$

— formule deja indiquée par FOSTER et nous-même *(loc. cit.)* — et ce sont les composantes horizontales de H qui se définissent au moyen des fonctions de BESSEL et de HANKEL. Comme pour le champ électrique, on peut représenter la variation de H_z au moyen d'une courbe unique (fig. 5) donnant le rapport h_z de H_z à la composante H_{zc} du dipôle stationnaire d'égale amplitude [19, p. 35]

$$H_z = H_{zc} \cdot h_z, \qquad H_{zc} = -\sin\varphi \cdot r^{-2},$$

$$(2\text{-}78)\quad h_z = 2\gamma^{-2} r^{-2} [3 - (3 + 3\gamma r + \gamma^2 r^2)\, e^{-\gamma r}],$$

A petite distance numérique, on retrouve la valeur du courant continu; à grande distance numérique

$$(2\text{-}79)\quad H_z \sim -6 \sin\varphi\, \gamma^{-2} r^{-4};$$

H_z s'évanouit *comme la puissance quatrième de l'inverse de la distance.*

Partant de l'expression (2-40) du potentiel vecteur A_z à la surface du sol on trouve immédiatement la composante *horizontale parallèle au dipôle*

$$(2\text{-}80)\quad H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \sin\varphi \cos\varphi\, r^{-2} [\gamma r (I_1K_0 - I_0K_1) + 8\, I_1K_1].$$

Enfin, la composante horizontale *perpendiculaire à l'émetteur* s'écrit — en vertu des expressions générales (2-16, 17) et de l'éq. (2-8 c) —

$$(2\text{-}81)\quad H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 2\gamma^{-2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \gamma^2 \right) \frac{\partial P}{\partial z} \right\}.$$

Institutul Geologic al României

Pour $z = 0$, $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$ et — en vertu de (2-24) —

$$H_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}[I_0K_0 + I_1K_1]$$

(2-82)
$$= \sin^2\varphi\, \gamma r^{-1}(I_1K_0 - I_0K_1) + (8\sin^2\varphi - 2)\, r^{-2} I_1K_1 .$$

Comme pour le champ électrique, on obtient des expressions à variation azimutale simple par le passage aux coordonnées cylindriques.

La composante *radiale*

(2-83) $$H_r = H_x \cos\varphi + H_y \sin\varphi$$
$$= \sin\varphi \,.\, r^{-2}[\gamma r (I_1K_0 - I_0K_1) + 6\, I_1K_1]$$

se réduit pour les petites valeurs de r à l'expression

(2-84) $$H_r \sim \sin\varphi \,.\, r^{-2}$$

du courant continu. A grande distance numérique — en employant des termes supplémentaires dans les développements semi-convergents dont les premiers termes figurent dans (2-33) — on obtient

(2-85) $$H_r \sim 4\sin\varphi \,.\, \gamma^{-1} r^{-3} .$$

On trouve donc, comme pour les composantes électriques horizontales, une *décroissance suivant l'inverse du cube de la distance à l'émetteur.*

La composante *tangentielle*

(2-86) $$H_\varphi = -H_x \sin\varphi + H_y \cos\varphi$$
$$= -2\cos\varphi \,.\, r^{-2} I_1 K_1 = r^{-1} A_z$$

prend également au voisinage de l'origine — en vertu de (2-41) — sa valeur

(2-87) $$H_{\varphi c} = -\cos\varphi \,.\, r^{-2}$$

du cas stationnaire. Lorsqu'on s'éloigne beaucoup du dipôle

(2-88) $$H_\varphi \sim -2\cos\varphi \,.\, \gamma^{-1} r^{-3},$$

Institutul Geologic al României

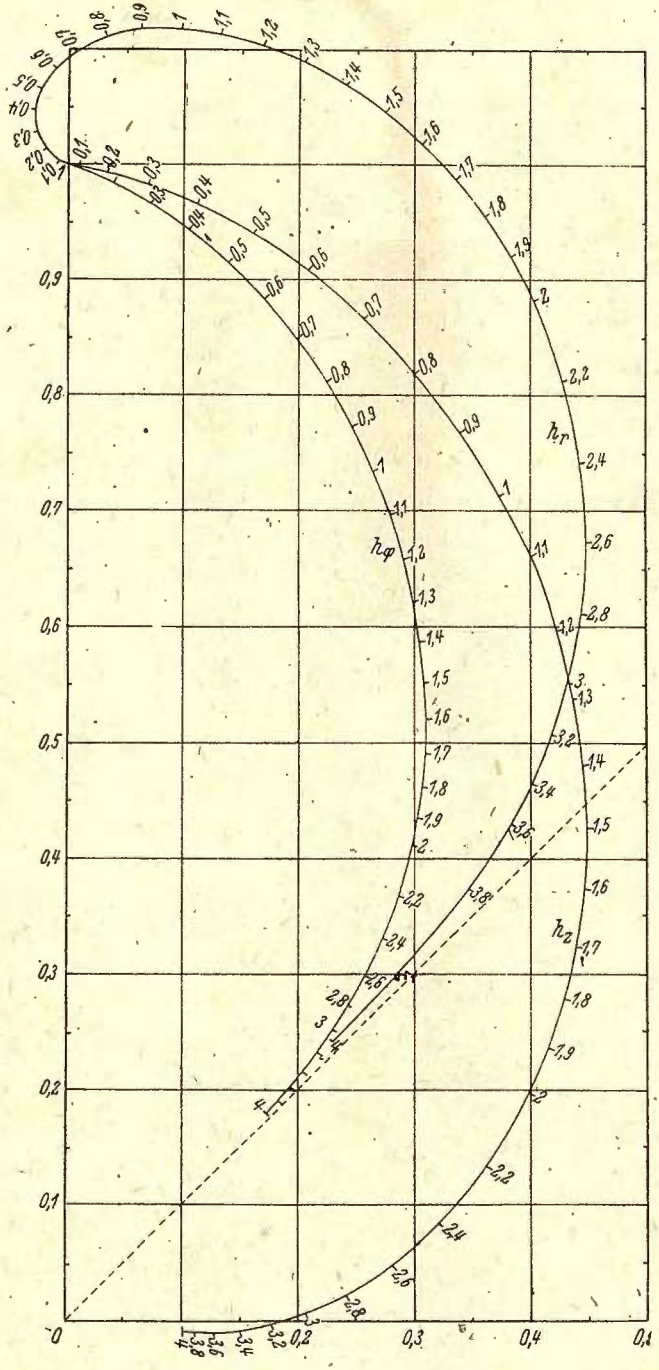

Fig. 5. — Diagrammes complexes des facteurs magnétiques de courant alternatif h_r, h_φ, h_z, en fonction de la distance numérique $u = |\gamma| r/2$.

INSTITUTUL GEOLOGIC - BIBLIOTECA

Institutul Geologic al României

la décroissance a encore lieu suivant l'inverse du cube de la distance, mais l'amplitude n'est plus que la moitié de celle de la composante radiale (remarquer les circonstances inverses pour le champ électrique). Comme au voisinage de l'origine, il y a de nouveau — à grande distance — concordance de phase des deux composantes H_r et H_φ — mais avec un déphasage commun de $\frac{\pi}{4}$ par rapport au courant de l'émetteur. On peut facilement prouver que dans cette zone, en vertu des relations (2-85) et (2-88), la direction de la projection horizontale du champ magnétique en un point M fait avec le rayon OM (fig. 6) un angle β déterminé par l'égalité

$$(2\text{-}89) \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}\cot\varphi,$$

ce qui est équivalent à la relation géométrique suivante:

La perpendiculaire élevée sur OM au point Q défini par

$$2OQ = QM$$

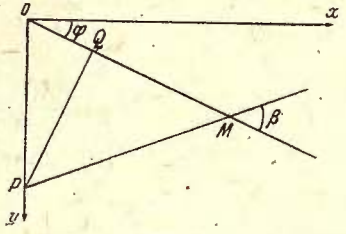

Fig. 6.

coupe l'axe *oy* en un point P; PM est la direction du champ magnétique horizontal dans la zone asymptotique. Dans le cas stationnaire, ou au voisinage de l'origine en courant alternatif, le point Q est le milieu de OM.

Les diagrammes vectoriels de la figure 5 représentent les rapports h_r, h_φ et h_z avec les grandeurs correspondantes du cas stationnaire

$$(2\text{-}90) \quad H_r = H_{rc} \cdot h_r, \quad h_r = \gamma r\,(I_1K_0 - I_0K_1) + 6\,I_1K_1,$$

$$(2\text{-}91) \quad H_\varphi = H_{\varphi c} \cdot h_\varphi; \quad h_\varphi = 2\,I_1K_1,$$

$$(2\text{-}78) \quad H_z = H_{zc} \cdot h_z, \quad h_z = 2\gamma^{-2}r^{-2}[3 - (3 + 3\gamma r + \gamma^2 r^2)\,e^{-\gamma r}],$$

en fonction de la distance numérique $u = \frac{|\gamma|}{2} r$.

La figure 7 montre les courbes d'égale ellipsité de la composante magnétique horizontale, calculées d'après les règles

Institutul Geologic al României

indiquées pour le champ électrique. Les ellipsités — qui ne dépassent pas 0,14 — sont en général beaucoup plus petites que celles de la composante électrique correspondante. Dans le cas des émetteurs courts, il y a donc polarisation rectiligne presque parfaite de la composante H horizontale, circonstance reconnue par voie expérimentale et mise à profit par les fondateurs de l'ancienne méthode de prospection ELBOF. Comme pour le champ électrique, sur chaque cercle $u = \text{const.}$ le maximum de l'ellipsité est égal à la tangente de la demi-différence de phase entre h_r et h_φ. La tangente de l'azimut du maximum est ici égale au rapport des modules de ces mêmes quantités. Par suite de l'absence des cercles de phase nulle les lignes d'égale ellipsité, quoique fermées, ont une toute autre allure que les lignes correspondantes du champ électrique.

Les lignes de la figure 8 représentent les variations de quelques-unes des quantités mesurables sur la ligne médiane *oy* du dipôle telles que:

a) L'inclinaison du grand axe de l'ellipse magnétique — laquelle tombe rapidement de la valeur $\pi/4$ (dipôle continu) à zéro, par suite de la décroissance de la composante H_z par rapport à la composante H_r.

b) L'ellipsité, qui part de zéro, passe par un maximum d'environ 0,256 pour $u \sim 2$ et revient asymptotiquement à zéro, à grande distance de l'émetteur.

c) Le rapport des amplitudes horizontale et verticale, à décroissance régulière de 1 a 0.

L'échelle logarithmique de ce diagramme permet la confrontation immédiate avec les résultats expérimentaux, établir à une autre échelle des longueurs sur *oy*.

Dans la fig. 9 ont été représentées les lignes d'égale valeus maxima du champ magnétique horizontal et dans la figure 10 ont été tracées les lignes d'égal déphasage du grand axe de l'ellipse magnétique horizontale.

Le tableau II contient les valeurs de la partie réelle et de la partie imaginaire pour chacune des quantités h_r, h_φ, h_z lorsque u varie de 0 à 4. Il permet de calculer facilement toutes les

Institutul Geologic al României

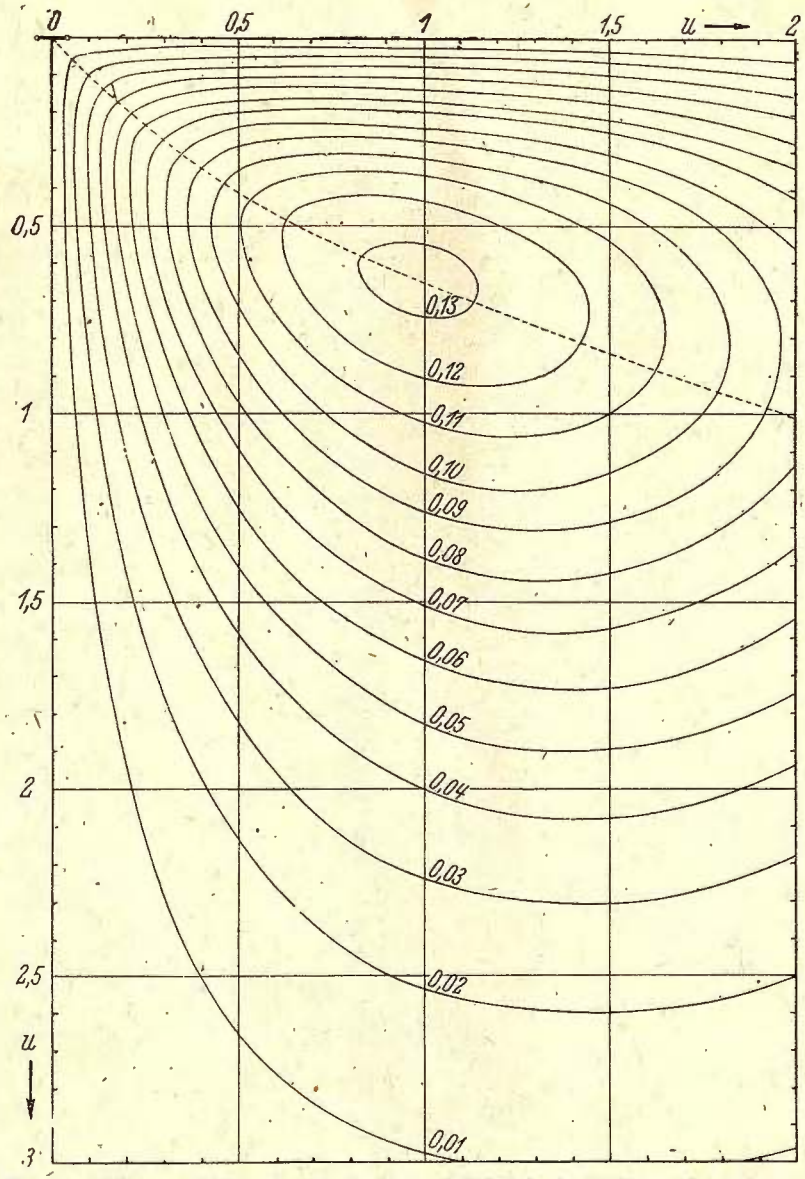

Fig. 7. — Lignes d'égal rapport des axes (ellipsité) de l'ellipse de polarisation magnétique horizontale.

. . . Lieu des maximums d'ellipsité sur les cercles u = const.

INSTITUTUL GEOLOGIC - BIBLIOTECA
Institutul Geologic al României

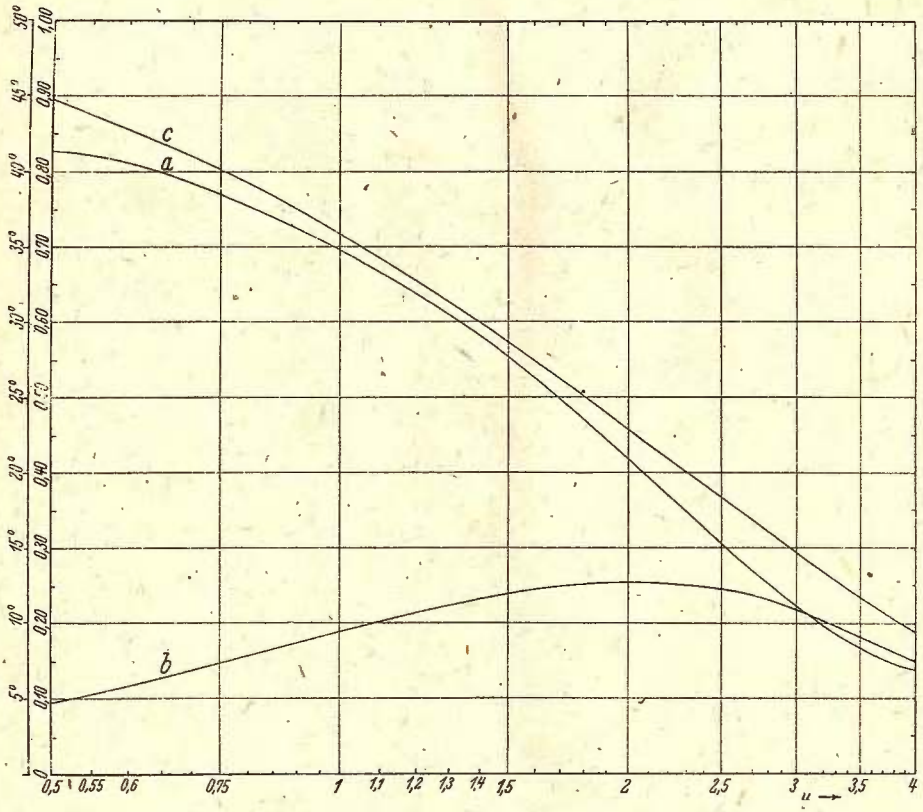

Fig. 8. — Variation, sur la ligne médiane (*oy*) du dipôle, des quantités: *a)* inclinaison du grand axe de l'ellipse magnétique; *b)* rapport des axes (ellipsité) de l'ellipse de polarisation magnétique; *c)* rapport des amplitudes des c. magnétiques verticale et horizontale.

INSTITUTUL GEOLOGIC - BIBLIOTECA
Institutul Geologic al României

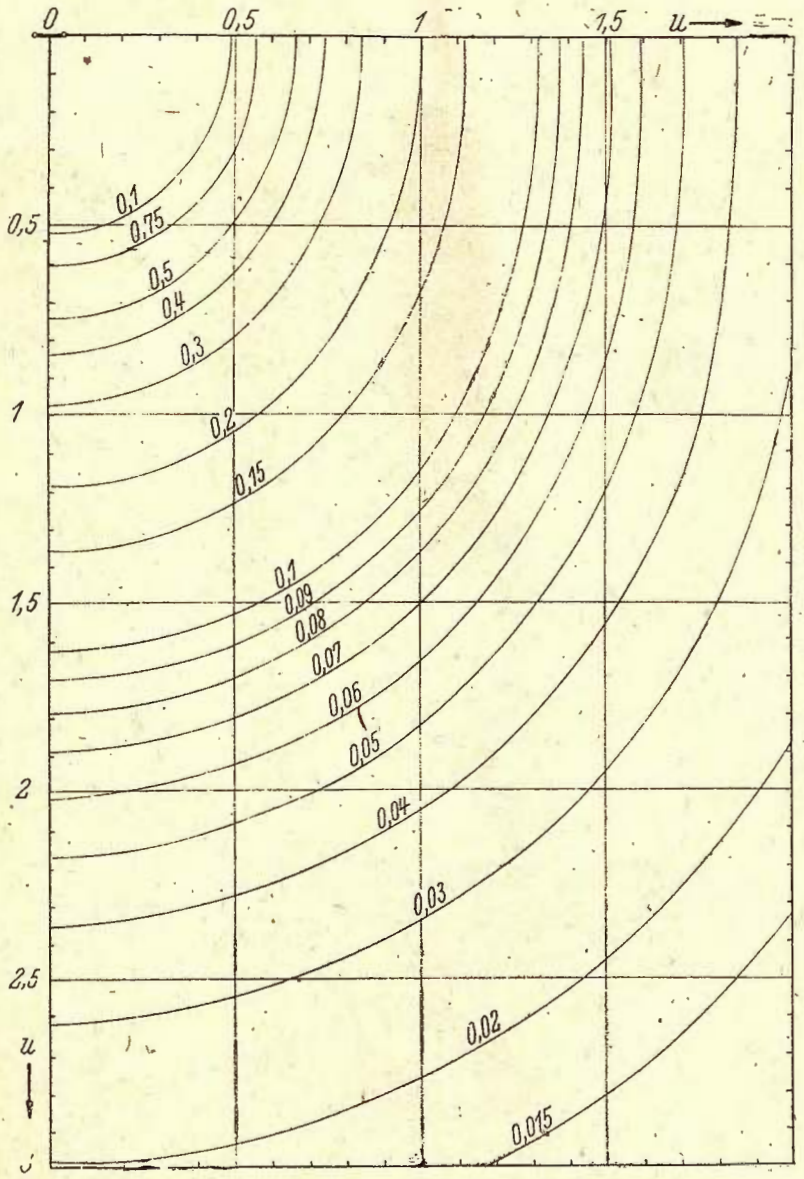

Fig. 9. — Lignes d'égale valeur du maximum M_h de la composante magnétique horizontale. Sur les lignes sont inscrites les valeurs de $|\gamma|^{-2} M_h$.

INSTITUTUL GEOLOGIC - BIBLIOTECA
Institutul Geologic al României

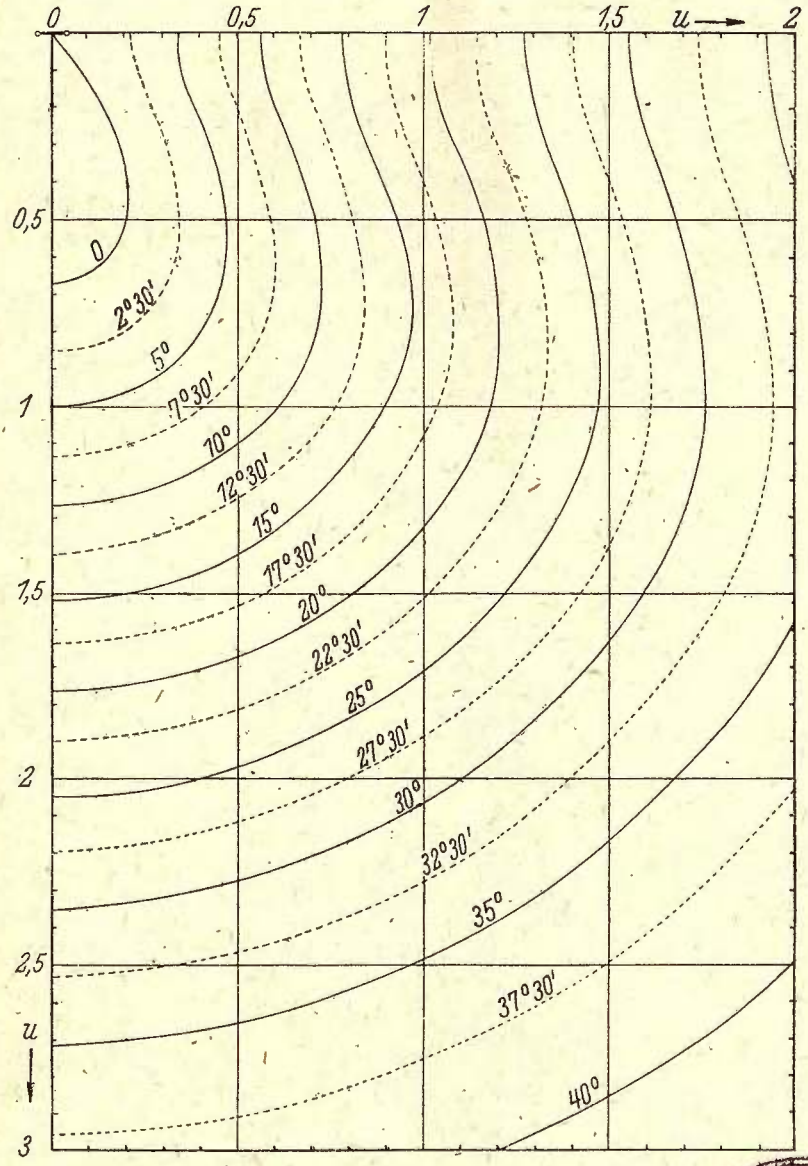

Fig. 10. — Lignes d'égal déphasage de la composante magnétique horizontale maxima.

INSTITUTUL GEOLOGIC - BIBLIOTECA
Institutul Geologic al României

autres quantités qui pourraient intéresser les expérimentateurs au sujet du champ magnétique considéré.

TABLEAU II

Partie réelle et partie imaginaire des facteurs magnétiques de courant alternatif h_r, h_φ, h_z.

u	h_r		h_φ		h_z	
	Re.	Im.	Re.	Im.	Re.	Im.
0	1,000	0	1,000	0	1,000	0
0,1	1,004	0,008	0,996	—0,013	0,999	—0,009
0,2	1,014	0,020	0,985	—0,040	0,995	—0,034
0,3	1,030	0,028	0,967	—0,071	0,985	—0,070
0,4	1,048	0,030	0,943	—0,105	0,967	—0,114
0,5	1,067	0,024	0,915	—0,138	0,941	—0,161
0,6	1,084	0,011	0,883	—0,169	0,907	—0,209
0,7	1,100	—0,009	0,848	—0,198	0,867	—0,256
0,8	1,111	—0,034	0,811	—0,223	0,820	—0,300
0,9	1,117	—0,064	0,773	—0,245	0,768	—0,339
1	1,118	—0,102	0,735	—0,264	0,713	—0,373
1,1	1,114	—0,133	0,697	—0,279	0,656	—0,401
1,2	1,104	—0,169	0,659	—0,290	0,598	—0,422
1,3	1,090	—0,206	0,622	—0,299	0,539	—0,436
1,4	1,070	—0,241	0,587	—0,305	0,482	—0,445
1,5	1,047	—0,275	0,554	—0,308	0,427	—0,448
1,6	1,019	—0,306	0,522	—0,309	0,374	—0,446
1,7	0,989	—0,335	0,492	—0,309	0,325	—0,440
1,8	0,956	—0,361	0,463	—0,306	0,279	—0,430
1,9	0,921	—0,383	0,437	—0,303	0,236	—0,416
2	0,886	—0,401	0,412	—0,298	0,198	—0,400
2,2	0,813	—0,429	0,368	—0,286	0,134	—0,363
2,4	0,741	—0,444	0,331	—0,273	0,084	—0,322
2,6	0,674	—0,448	0,300	—0,258	0,048	—0,281
2,8	0,612	—0,444	0,273	—0,244	0,023	—0,242
3	0,557	—0,434	0,251	—0,230	0,006	—0,207
3,2	0,508	—0,419	0,233	—0,216	—0,003	—0,176
3,4	0,466	—0,402	0,217	—0,204	—0,008	—0,151
3,6	0,430	—0,384	0,203	—0,193	—0,010	—0,129
3,8	0,400	—0,365	0,191	—0,183	—0,010	—0,111
4	0,374	—0,348	0,181	—0,174	—0,008	—0,097

Institutul Geologic al României

11. *Application numérique.* — Déterminons à titre d'application pratique des résultats précédents le champ électromagnétique en un point donné ($r = 133$ m, $\varphi = 30^0$) du levé expérimental de v. LUDWIGER *(loc. cit.)*.

A cet effet, nous calculerons d'abord en unités E. M., la puissance du dipôle équivalent d'après les indications fournies par l'auteur:

longueur de l'émetteur ..... 2500 cm.,
fréquence ..... 500 cycles/sec., ($\omega = 3142$)
intensité dans l'émetteur.. 2,5 Amp.

Si l'on admet pour le champ une variation strictement sinusoïdale, l'amplitude du courant dans l'émetteur — en C.G.S. — sera

$$2{,}5 \times \sqrt{2} \cdot 10^{-1} = 0{,}3536$$

et la puissance du dipôle équivalent

$$2500 \times 0{,}3536 = 884 \quad \text{U.E.M.}$$

Déterminons maintenant, au moyen des graphiques expérimentaux de v. LUDWIGER, l'équivalent en C.G.S. de l'unité de distance numérique. Nous partirons à cet effet de la figure 14 de son étude, dans laquelle sont présentées les valeurs de la phase de H_z, au moyen de courbes équiphases ayant la forme approximative de cercles concentriques à l'origine, en conformité avec la théorie exposée ci-dessus. On peut admettre sans grande erreur, pour le cercle de rayon $r = 500$ m, une phase de 63^0 ce qui correspond d'après notre graphique de h_z à une distance numérique de $u = 2$.

On a donc, en vertu de (2-55)

$$2 = \sqrt{\pi\sigma \cdot 3142} \cdot 50000$$

d'où l'on tire la valeur de la conductivité apparente du sol:

$$\sigma = 16{,}21 \cdot 10^{-5} \text{ Siemens/cm}^3,$$

équivalente à la résistivité

$$\sigma^{-1} = 61{,}7 \text{ ohms/m}^3.$$

Institutul Geologic al României

Ce résultat est inférieur aux valeurs moyennes (100—1000 Ω/m^3) données par POLDINI [21] pour la résistivité des calcaires, tout en restant dans le même ordre de grandeur. La valeur de la conductivité σ est nettement différente de celle — $0{,}8.10^{-5}$ Siemens — trouvée par v. LUDWIGER, au moyen d'une méthode d'approximation.

Les valeurs du champ magnétique (électrique), en un point déterminé peuvent être calculées facilement si l'on procède en deux étapes:

a) On calcule le champ magnétique (électrique) dans le cas stationnaire pour le dipôle d'égale amplitude.

b) On applique aux composantes stationnaires les facteurs de courant alternatif, interpolés dans les graphiques ou les tableaux numériques correspondants.

A titre d'exemple, reprenons le calcul des composantes du champ magnétique au point 31 ($r = 133$ m, $\varphi = 30^0$).

Les formules (2-78, 84, 87) donnent pour le dipôle stationnaire unitaire

$$H_{rc} = -H_{zc} = \sin\varphi \,.\, r^{-2} = 0{,}283 \,.\, 10^{-8}$$

$$H_{\varphi c} = -\cos\varphi \,.\, r^{-2} = -0{,}490 \,.\, 10^{-8}$$

et par conséquent, pour un dipôle équivalent à l'émetteur de v. LUDWIGER,

$$H_{rc} = -H_{zc} = 884 \times 0{,}283 \,.\, 10^{-8} = 0{,}250 \,.\, 10^{-5} \text{ Oersted}$$

$$H_{\varphi c} = -884 \times 0{,}490 \,.\, 10^{-8} = -0{,}433 \,.\, 10^{-5} \text{ Oersted.}$$

L'unité de distance numérique étant égale a 250 m, le point 31 se trouve à la distance numérique

$$u = 133 : 250 = 0{,}532$$

Par interpolation proportionnelle dans les tableaux de h_r, h_φ, h_z nous trouvons pour cette valeur de u

$$h_r = 1{,}072 + i \,.\, 0{,}019; \quad h_\varphi = 0{,}904 - i \,.\, 0{,}148;$$

$$h_z = 0{,}930 - i \,.\, 0{,}176$$

Institutul Geologic al României

L'application des formules (2-78, 90, 91) donne ensuite les valeurs complexes des trois composantes magnétiques cherchées

$$H_r = H_{rc} \,.\, h_r = (0{,}268 + i \,.\, 0{,}0050)\ 10^{-5}\ Oe$$

$$H_\varphi = H_{\varphi c} \,.\, h_\varphi = (-0{,}392 + i \,.\, 0{,}064)\ 10^{-5}\ Oe$$

$$H_z = H_{zc} \,.\, h_z = (-0{,}233 + i \,.\, 0{,}0044)\ 10^{-5}\ Oe$$

Un calcul analogue est valable pour le champ électrique, avec emploi du tableau I.

Institutul Geologic al României

CHAPITRE III

CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS LE SOL.

12. *Champ électrique à l'intérieur du sol.* — Dans le cas du courant continu, les composantes cartésiennes du champ électrique à l'intérieur du sol sont [19, p. 30].

$$(3\text{-}1)\quad E_x = \frac{1}{2\pi\sigma}\cdot\frac{R^2-3x^2}{R^5},\quad E_y = -\frac{1}{2\pi\sigma}\cdot\frac{3xy}{R^5},\quad E_z = -\frac{1}{2\pi\sigma}\cdot\frac{3xz}{R^5}$$

ou, en coordonnées cylindriques,

$$(3\text{-}2)\quad E_\varphi = -\frac{\sin\varphi}{2\pi\sigma}\cdot\frac{1}{R^3},\quad E_r = \frac{\cos\varphi}{2\pi\sigma}\cdot\frac{R^2-3r^2}{R^5},\quad E_z = -\frac{\cos\varphi}{2\pi\sigma}\cdot\frac{3zr}{R^5}.$$

En courant alternatif, les composantes cartésiennes sont (cf. 2-8 a)

$$E_x = -i\omega A_x + \frac{1}{4\pi\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div} A),\quad E_y = \frac{1}{4\pi\sigma}\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div} A),$$

$$E_z = -i\omega A_z + \frac{1}{4\pi\sigma}\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div} A),$$

où A_x, A_z et div A doivent être remplacés par leurs expressions (2-30), (2-31) et (2-44). Si l'on effectue ces substitutions en tenant compte des formules de dérivation (2-19, 20, 21, 22) on obtient

$$\begin{aligned}(3\text{-}3\text{ a})\qquad 4\pi\sigma E_x = {} & \gamma^2 z R^{-4}(3y^2 - R^2)\, I_0K_0 \\ & + [\ \gamma^3 y^2 z R^{-3} + \gamma R^{-5}(R+z)(3y^2 - R^2)]\, I_0K_1 \\ & + [-\gamma^3 y^2 z R^{-3} + \gamma R^{-5}(R-z)(3y^2 - R^2)]\, I_1K_0 \\ & - \gamma^2 z R^{-4}[3y^2 - R^2 + 3y^2 r^{-2} R^2]\, I_1K_1 \\ & - 2R^{-5}[R^2 - 3z^2 + \gamma R(R^2 - 3z^2) - \gamma^2 R^2 z^2]e^{-\gamma R},\end{aligned}$$

Institutul Geologic al României

$$4\pi\sigma E_y = -\gamma^2 \cdot 3xyz\, R^{-4} I_0 K_0$$
$$-[\gamma^3 xyz R^{-3} + \gamma \cdot 3xy\,(R+z)\,R^{-5}]\, I_0 K_1$$
(3-3 b)
$$+[\gamma^3 xyz R^{-3} - \gamma \cdot 3xy\,(R-z)\,R^{-5}]\, I_1 K_0$$
$$+\gamma^2 xyz\,(2R^2 + 3r^2)\, r^{-2} R^{-4} I_1 K_1,$$

(3-3 c) $$4\pi\sigma E_z = -2xz\lambda^{-5}(3 + 3\gamma R + \gamma^2 R^2)\, e^{-\gamma R}.$$

Une particularité remarquable de ces formules est que l'expression de la composante E_y ne contient pas de termes exponentiels, tandisque celle de E_z ne contient pas de termes à fonctions cylindriques.

Les composantes E_x, E_y, E_z ne sont pas adéquates à la représentation graphique, leur variation en fonction de x, y, z étant assez complexe. Par contre, en coordonnées cylindriques, les composantes E_φ, E_r, E_z présentent par rapport à φ des variations simples: *E_φ est proportionnel à sin φ, E_r et E_z à cos φ*. Par conséquent, les quantités $E_\varphi/\sin\varphi$, $E_r/\cos\varphi$, $E_z/\cos\varphi$ sont fonctions uniquement des deux variables r et z et comme telles peuvent être représentées par des graphiques bidimensionnels.

Cette dépendance simple par rapport à φ des composantes cylindriques est une propriété remarquable du dipôle qui rend l'étude du champ de cet émetteur accessible au calcul numérique complet. Pour le courant continu, cette propriété est immédiatement apparente dans les formules (3-2). Pour le courant alternatif, elle peut être déduite assez facilement des expressions générales (2-8 b). Nous nous bornerons à présenter la démonstration pour la composante tangentielle E_φ, les composantes E_r et E_z donnant lieu à des conclusions analogues.

Par suite des équations (2-8 b), (2-16, 17) et (2-43)

$$E_\varphi = xr^{-1} E_y - yr^{-1} E_x$$
$$= i\omega \sin\varphi A_x + \frac{1}{4\pi\sigma}\left[\cos\varphi \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{div}\,A) - \sin\varphi \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{div}\,A)\right]$$
(3-4)
$$= i\omega \sin\varphi A_x + \frac{1}{2\pi\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left[\cos\varphi \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y} - \sin\varphi \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right].$$

Institutul Geologic al României

Des identités

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = x r^{-1} \frac{\partial Q}{\partial r}, \tag{3-5}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = x^2 r^{-2} \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + y^2 r^{-3} \frac{\partial Q}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x\, \partial y} = xy r^{-2} \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} - xy r^{-3} \frac{\partial Q}{\partial r},$$

on déduit

$$\cos\varphi \frac{\partial^2 Q}{\partial x\, \partial y} - \sin\varphi \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = -\sin\varphi\, r^{-1} \frac{\partial Q}{\partial r}$$

et en vertu de la dernière des égalités (3-4)

$$E_\varphi = \frac{\sin\varphi}{4\pi\sigma}\left[\gamma^2 A_x - 2 r^{-1} \frac{\partial^2 Q}{\partial r\, \partial z}\right]. \tag{3-6}$$

Les termes du crochet étant fonctions uniquement de r, z ce qui est visible dans (2-12 a) et (2-15), la propriété annoncée est démontrée.

Par suite de l'équation (2-16) et en vertu de la relation

$$\Delta \frac{\partial Q}{\partial z} - \gamma^2 \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

— conséquence de l'équation de propagation (2-8 c) — on obtient l'expression de la composante E_φ en fonction de P et Q

$$E_\varphi = \frac{\sin\varphi}{2\pi\sigma}\left\{\frac{\partial^3 Q}{\partial r^2\, \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right\}. \tag{3-7}$$

D'une manière analogue, on trouve

$$E_r = -\frac{\cos\varphi}{2\pi\sigma}\left\{r^{-1} \frac{\partial^2 Q}{\partial r\, \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right\}, \tag{3-8}$$

$$E_z = -\frac{\cos\varphi}{2\pi\sigma} \frac{\partial^2 P}{\partial r\, \partial z}, \tag{3-9}$$

expressions qui mettent bien en évidence la variation simple par rapport à φ des trois composantes électriques.

Pour la représentation graphique, il est indiqué de choisir comme distance numérique à l'origine la quantité

$$u = \frac{|\gamma|}{2} R, \qquad (R = \sqrt{r^2 + z^2}) \tag{3-10}$$

Institutul Geologic al României

généralisation de la définition (2-55), valable pour la surface du sol. Un point M à l'intérieur du sol sera défini par sa distance numérique à l'origine u, son azimut φ et l'angle $zoM = \theta$ du rayon oM avec l'axe oz. On posera

$$\mu = \cos\theta.$$

De ce que la fonction P a la dimension L^{-1} et la fonction Q est sans dimensions, les expressions (3-7, -8, 9) montrent que l'on peut obtenir une représentation bidimensionnelle des quantités $E_\varphi/\sin\varphi$, $E_r/\cos\varphi$, $E_z/\cos\varphi$ pour le dipôle de puissance unitaire en multipliant ces quantités par $\lambda\sigma|\gamma|^{-3}$, où λ désigne un facteur numérique arbitraire. Si — pour raison de simplicité — nous choisissons $\lambda = 1$, nous voyons que les grandeurs [1])

$$\bar{j}_\varphi = \frac{|\gamma|^{-3}\sigma}{\sin\varphi} E_\varphi = \frac{|\gamma|^{-3}}{\sin\varphi} j_\varphi \;,\; \bar{j}_r = \frac{|\gamma|^{-3}}{\cos\varphi} j_r \;,\; \bar{j}_z = \frac{|\gamma|^{-3}}{\cos\varphi} j_z \;,$$

que l'on peut appeler les *composantes réduites de la densité de courant* $j = \sigma E$, sont des fonctions uniquement de u et θ et, comme telles, peuvent être figurées dans des graphiques bidimensionnels. Pour $\varphi = 0$

$$\bar{j}_r = |\gamma|^{-3} j_r \quad , \quad \bar{j}_z = |\gamma|^{-3} j_z;$$

ces deux composantes réduites sont donc proportionnelles aux composantes j_r et j_z de la densité de courant dans le plan du dipôle $y = 0$.

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\bar{j}_\varphi = |\gamma|^{-3} j_\varphi$ est proportionnelle à la densité de courant dans le plan médian $x = 0$.

Les composantes réduites représentent donc la distribution du courant dans les plans de symétrie $x = 0$, $y = 0$; leur connaissance permet de calculer immédiatement la densité de courant — et le champ électrique — pour un azimut quelconque φ.

[1]) Dans le cas d'un dipôle de puissance $k = (l\,I)$, (l longueur du câble joignant les électrodes et I intensité maxima du courant dans ce câble) il faudra prendre:

$$\bar{j}_\varphi = \frac{|\gamma|^{-3}\sigma}{k\sin\varphi} E_\varphi, \text{ etc.}$$

Institutul Geologic al României

Nous étudierons successivement chacune de ces trois quantités.

La *composante tangentielle réduite* a pour expression en vertu de (3-7)

$$\bar{j}_\varphi = \frac{|\gamma|^{-3}}{2\pi}\left\{\frac{\partial^3 Q}{\partial r^2\,\partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right\} \tag{3-12}$$

ou — tenant compte des valeurs explicites des dérivées de P et Q obtenues au moyen des formules (2-19, 20, 21, 22)

$$\begin{aligned}\bar{j}_\varphi = -\frac{|\gamma|^{-3}\,R^{-3}}{4\pi}\Big\{&\gamma^2R^2\mu\,(2-3\mu^2)\,I_0K_0\\ &+[\ \gamma^3R^3\mu\,(1-\mu^2)+\gamma R\,(1+\mu)\,(2-3\mu^2)]\,I_0K_1\\ &+[-\gamma^3R^3\mu\,(1-\mu^2)+\gamma R\,(1-\mu)\,(2-3\mu^2)]\,I_1K_0\\ &+\gamma^2R^2\mu\,(3\mu^2-4)\,I_1K_1\\ &-2\,[(1-3\mu^2)\,(1+\gamma R)-\gamma^2R^2\mu^2]\,e^{-\gamma R}\Big\}\end{aligned} \tag{3-13}$$

La relation (3—13) peut se déduire par un simple changement de coordonnées des expressions (3 — 3 a, b), des composantes cartésiennes E_x et E_y.

A la surface du sol ($\mu = 0$, $R = r$)

$$\bar{j}_\varphi = -\frac{|\gamma|^{-3}\,r^{-3}}{2\pi}\{\gamma r\,(I_0K_1+I_1K_0)-(1+\gamma r)\,e^{-\gamma r}\} \tag{3-14}$$

et par suite de l'identité (2—4)

$$\bar{j}_\varphi = \bar{j}_{\varphi c}[2-(1+\gamma r)\,e^{-\gamma r}]. \tag{3-15}$$

$\bar{j}_{\varphi c}$ étant la densité de courant continu réduite (voir plus bas). On retrouve dans le crochet du second membre de (3-15) le rapport e_φ de la formule (2-53) entre les champs électriques alternatifs et continu à la surface du sol.

Sur l'axe vertical oz, ($\mu = 1$, $z = R$, $I_0 = 1$, $I_1 = 0$)

$$\bar{j}_\varphi = \bar{j}_{\varphi c}\left\{-\frac{\gamma^2z^2}{2}K_0(\gamma z) - \gamma z K_1(\gamma z) + (2+2\gamma z+\gamma^2z^2)\,e^{-\gamma z}\right\}. \tag{3-16}$$

Institutul Geologic al României

Les figures 11 a, b représentent le module et la phase de la densité $\bar{j}_\varphi$ dans un plan vertical passant par le dipôle, jusqu'à la distance numérique — horizontale et verticale — $u = 2$.

Pour permettre une comparaison avec le courant continu, on a figuré en tirets, dans la fig. 11 a, la composante réduite $\bar{j}_{\varphi c}$ pour le *régime stationnaire*.

L'existence de cette grandeur en courant continu peut être reconnue en partant de l'expression de la densité tangentielle à l'intérieur du sol

$$(3\text{-}2) \qquad j_{\varphi c} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin \varphi}{R^3}.$$

Si l'on emploie le même γ que pour le courant alternatif de comparaison, on peut définir pour le courant continu la composante tangentielle réduite

$$(3\text{-}17) \qquad \bar{j}_{\varphi c} = \frac{|\gamma|^{-3}}{\sin \varphi} j_{\varphi c} = -\frac{|\gamma|^{-3} R^{-3}}{2\pi} = -\frac{1}{16\pi} \cdot \frac{1}{u^3}.$$

On voit que les lignes d'égale composante réduite sont des *cercles* ayant le dipôle pour centre, fait évident si l'on se rapporte à l'interprétation physique — déjà indiquée — de cette grandeur dans le plan $x = 0$.

L'examen de la figure 11 a révèle le fait remarquable que la densité du courant alternatif dans le plan $x = 0$ dépasse celle du courant continu jusqu'à une profondeur $u = 2$. A des profondeurs plus grandes elle décroît d'ailleurs beaucoup plus vite qu'en régime stationnaire. La figure met en évidence que ce phénomène, bien connu en Electromagnétisme sous le nom de *skin-effect*, est assez peu accusé sur la composante électrique tangentielle jusqu'à une distance numérique radiale $u = 2$.

La figure 11 b présente les lignes d'égale phase de la composante j_φ. On observe au voisinage de la surface du sol une région de phases négatives, suivie à l'intérieur du sol de valeurs positives présentant une croissance régulière en profondeur. En particulier, sur l'axe oz la phase part de 0 à l'origine, passe par

Institutul Geologic al României

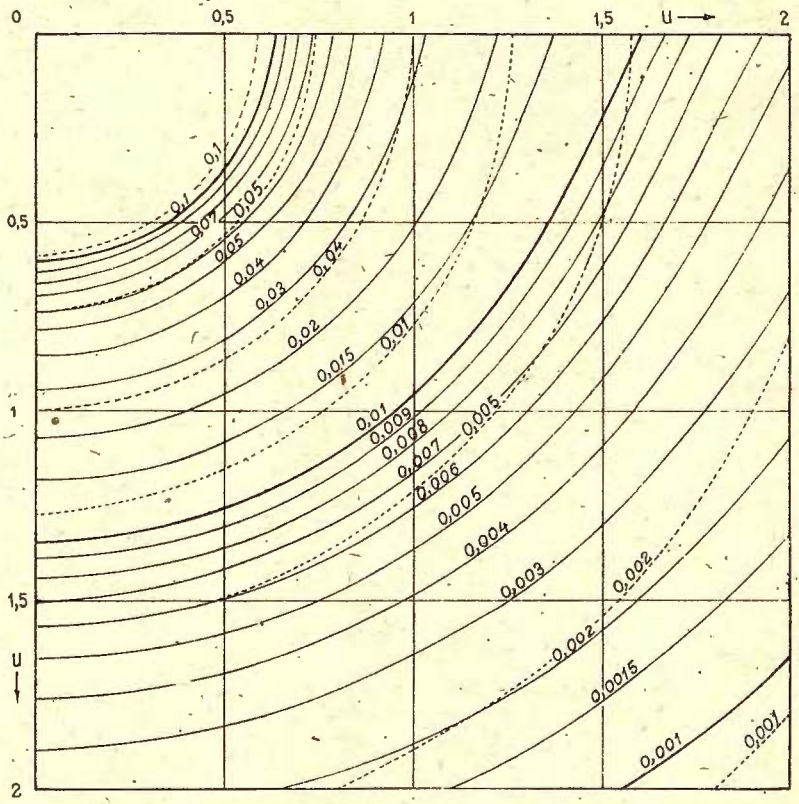

Fig. 11 *a*. — Amplitude de la composante tangentielle réduite $\overline{j}_{\varphi}$ de la densité de courant. En pointillé, les lignes d'égale valeur de la même composante en courant continu.

Institutul Geologic al României

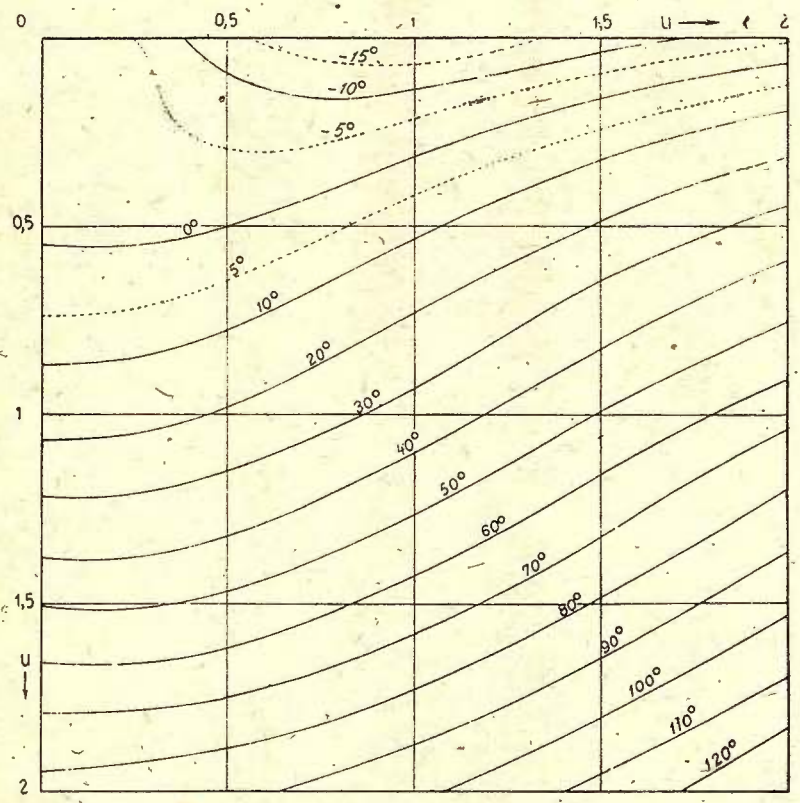

Fig. 11 *b*. — Phase de la composante tangentielle réduite $\overline{j}_{\varphi}$

INSTITUTUL GEOLOGIC - BIBLIOTECA

Institutul Geologic al României

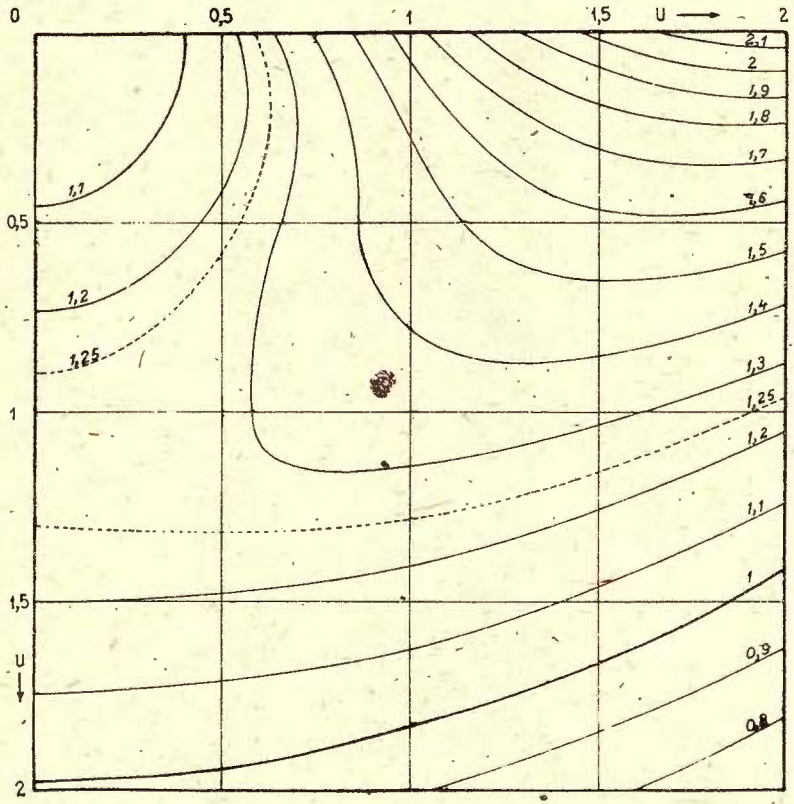

Fig. 11 *c*. — Rapport des amplitudes des composantes tangentielles réduites, $\overline{j}_{\varphi}$ et $\overline{j}_{\varphi c}$, en c. alternatif et c. continu.

BIBLIOTECA - INSTITUTUL GEOLOGIC -

Institutul Geologic al României

un minimum d'environ -2^0 pour croître ensuite d'une manière monotone jusqu'à toute valeur positive.

Dans la figure 11 c a été représentée la distribution dans le sol du rapport $|e_\varphi|$ entre les modules des densités tangentielles en courant alternatif et continu

$$|e_\varphi| = |j_\varphi| / |j_{\varphi c}| . \tag{3-18}$$

On voit que ce rapport, qui peut caractériser d'une manière précise le skin-effect, est supérieur à l'unité dans toute la zone située au-dessus de la ligne $|e_\varphi| = 1$ et présente à la profondeur numérique $u \sim 1{,}1$, sur l'axe oz un « Sattelwert » d'environ 1,27. A la surface du sol, le rapport $|e_\varphi|$ se rapproche asymptotiquement de la valeur $u = 2$, à mesure que l'on s'éloigne de l'origine.

En résumé, on peut constater que la concentration du courant est moindre en dessous de l'émetteur que latéralement et que, en un certain sens, l'émetteur réduit sensiblement le skin-effect en son voisinage immédiat en refoulant ses valeurs maxima à des distances variables suivant les directions radiales.

La *composante radiale réduite* $\bar{j}_r$, peut de même se déduire par un changement de coordonnées à partir des expressions des composantes cartésiennes (3-3 a, b) ou encore par substitution dans (3-8) des dérivées des fonctions Q et P.

On obtient

$$\begin{aligned}\bar{j}_r = -\frac{|\gamma|^{-3} R^{-3}}{4\pi} \{ & \gamma^2 R^2 \mu (I_0 K_0 - I_1 K_1) \\ & + \gamma R [(1+\mu) I_0 K_1 + (1-\mu) I_1 K_0] \\ & + 2[(1-3\mu^2)(1+\gamma R) - \gamma^2 R^2 \mu^2] e^{-\gamma R} \}\end{aligned}$$

A la surface du sol, $\mu = 0$, $R = r$ et tenant compte de (2-4)

$$\begin{aligned}\bar{j}_r &= -\frac{|\gamma|^{-3} r^{-3}}{2\pi} \{ 1 + (1+\gamma r) e^{-\gamma r} \} \\ &= \bar{j}_{rc} \cdot \frac{1}{2} [1 + (1+\gamma r) e^{-\gamma r}].\end{aligned}$$

Institutul Geologic al României

On retrouve au deuxième membre — multiplié par la densité de courant continu réduite $\bar{j}_{rc}$ — la valeur (2-52) du facteur de courant alternatif e_r.

Sur l'axe oz, ($\mu = 1$, $I_0 = 1$, $I_1 = 0$), $\bar{j}_r$ a la même expression (3-16) que $\bar{j}_\varphi$, au signe près. Ce fait s'explique aisément: la densité de courant le long de cet axe peut être considérée indifféremment, soit comme une composante radiale dans le plan $y = 0$, soit comme une composante tangentielle — de signe opposé — dans le plan $x = 0$.

En courant continu, la densité de courant radiale à l'intérieur du sol est [cf. (3-2)]

$$j_{rc} = \frac{\cos\varphi}{2\pi}(3\mu^2 - 2) \tag{3-21}$$

et la densité radiale réduite

$$\bar{j}_{rc} = \frac{|\gamma^2|^{-3} R^{-3}}{2\pi}(3\mu^2 - 2). \tag{3-22}$$

On a tracé dans la figure 12 a — en traits continus — les courbes d'égale module $|\bar{j}_r| = \text{const.}$ (c. alternatif) et en pointillé les lignes $\bar{j}_{rc} = \text{const.}$ (c. continu). Ces dernières, homothétiques par rapport à l'origine, comportent chacune deux branches distinctes, tangentes en ce point à la droite $\mu = \sqrt{2/3}$. Les courbes $|\bar{j}_r| = \text{const.}$ n'ont qu'une seule branche qui présente toutefois un coude très accentué au voisinage de la droite ci-dessus. Près de l'origine les courbes $|\bar{j}_r|$ et $|\bar{j}_{rc}|$ se confondent, comme il était à prévoir. Lorsqu'on s'éloigne de l'origine, on voit qu'au voisinage de la surface du sol la composante $\bar{j}_r$ prend des valeurs inférieures à celles de $\bar{j}_{rc}$, comportement inverse de celui de la composante tangentielle. Par contre, au voisinage de l'axe oz, on a vu que $|\bar{j}_r| = |\bar{j}_\varphi| > |\bar{j}_{rc}|$ jusqu'à $u = 2$; pour des profondeurs plus grandes, $|\bar{j}_r|$ décroît beaucoup plus vite que $|\bar{j}_{rc}|$.

La figure 12 b présente les lignes d'égale phase de la composante radiale. Pour bien comprendre les particularités de cette figure, il est utile de nous rapporter à l'expression (3-22) de la composante radiale réduite en courant continu.

Institutul Geologic al României

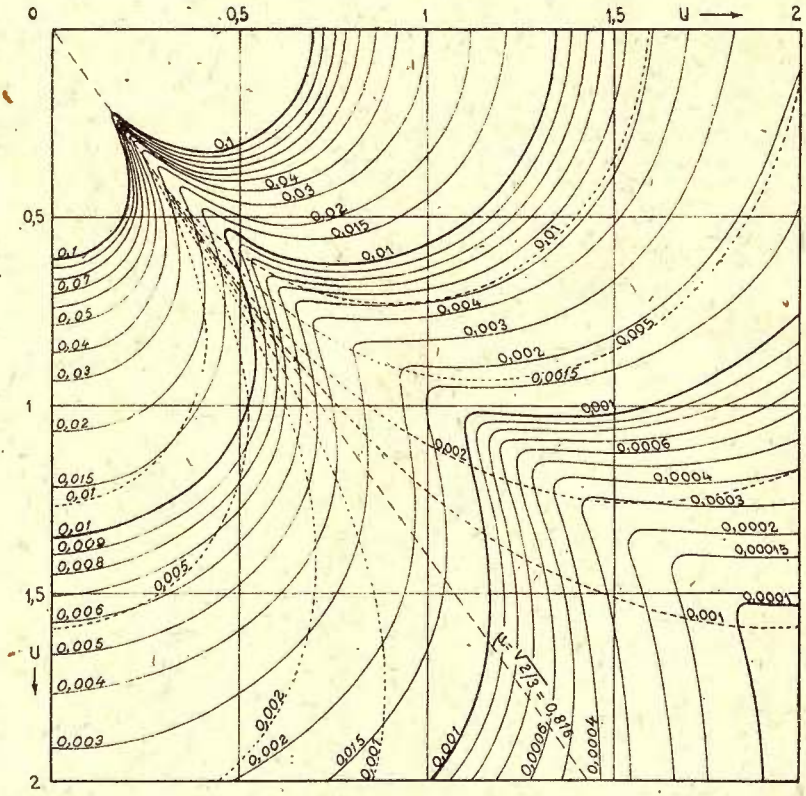

Fig. 12 *a*. — Amplitude de la composante radiale réduite $\overline{j_r}$ de la densité de courant. En pointillé, les lignes d'égale valeur de la même composante en c. continu.

Institutul Geologic al României

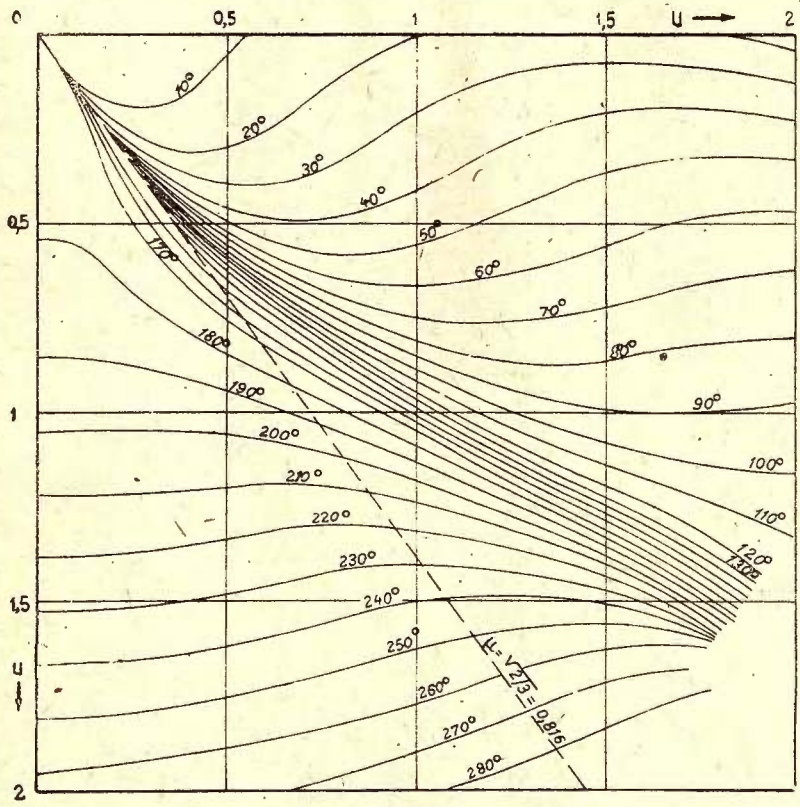

Fig. 12 *b*. — Phase de la composante radiale réduite $\bar{j}_r$.

GEOLOGIC - BIBLIOTECA - INSTITUTUL

Institutul Geologic al României

Si, gardant R constant, on fait varier μ de 0 à 1, $\bar{j}_{rc}$ passe d'une suite de valeurs négatives à une suite de valeurs positives, après s'être annulé pour $\mu = \sqrt{2/3}$. En termes d'amplitude et de phase, cela signifie que pour cette valeur de μ, le module passe par un minimum égal à zéro et la phase exécute un saut brusque de 180°.

En courant alternatif, le module ne s'annule plus, mais présente un minimum accusé au voisinage du rayon $\mu = \sqrt{2/3}$. De même, la phase montre au voisinage du même rayon une variation très rapide, caractérisée graphiquement par une grande concentration des lignes équiphases. Au voisinage de l'origine, les courbes équiphases comprises entre 0° et 180° arrivent tangentiellement à ce rayon particulier, les conditions étant identiques à celles du c. continu.

La *composante verticale réduite* de la densité de courant se déduit immédiatement de la formule (3-3c)

$$(3\text{-}23) \qquad \boxed{\bar{j}_z = -\frac{|\gamma|^{-3} R^3}{2\pi} \mu \sqrt{1-\mu^2}\,[3 + 3\gamma R + \gamma^2 R^2],}$$

En courant continu

$$(3\text{-}24) \qquad \bar{j}_{zc} = -\frac{|\gamma^{-3}|\, R^{-3}}{2\pi} 3\mu \sqrt{1-\mu^2}.$$

Dans la figure 13 a se trouvent tracées en trait continu les lignes d'égal module $|\bar{j}_z|$ et en pointillé, quelque lignes d'égal module $|\bar{j}_{zc}|$. On voit bien dans cette figure que la densité du c. alternatif est partout inférieure à celle du c. continu. Il ressort des formules (3-23, 24) que toutes les lignes d'égal module sont symétriques par rapport au rayon $\mu = 1/\sqrt{2}$ et tangentes aux rayons extrêmes $\mu = 0$ et $\mu = 1$.

La figure 13 b présente les courbes d'égale phase de la composante verticale $\bar{j}_z$, lignes qui sont de simples cercles ayant l'origine pour centre. On voit en effet dans la formule (3-23) que la phase ne dépend que de γR.

Institutul Geologic al României

Si nous nous posons le problème: « Quels sont les points du sol ou de la surface où le vecteur électrique a une polarisation rectiligne? », nous voyons que des lieux géométriques évidents pour ces points sont l'axe ox et le plan médian $x = 0$. Un autre lieu ayant cette propriété résulte de la comparaison des figures 12 b et 13 b. Il est constitué par les points du plan du dipôle $y = 0$ ayant même phase pour j_r et j_z, en d'autres termes par les intersections des lignes présentant même valeur de phase dans ces deux figures. La détermination graphique de ces intersections nous a donné la ligne de forme parabolique de la fig. 13 b. De la forme circulaire des lignes équiphases de la composante j_z et de la tendance à la forme asymptotique horizontale des équiphases de la composante j_r, on peut conclure que d'autres branches du même lieu géométrique doivent apparaître à des distances numériques du dipôle supérieures à celles de la figure 13 b.

13. *Champ magnétique à l'intérieur du sol.* — Les composantes rectangulaires du champ magnétique à l'intérieur du sol se déduisent du potentiel vecteur (A_x, 0, A_z) par les formules classiques

$$(3\text{-}25\ a, b, c)\quad H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y},\quad H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},\quad H_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Comme pour le champ électrique, la représentation tridimensionnelle de ces grandeurs est très malaisée et l'on est conduit à donner la préference aux composantes cylindriques.

Pour la composante verticale H_z, laquelle en vertu de l'égalité (3-25 c) peut s'écrire

$$(3\text{-}26)\qquad H_z = -\frac{\partial A_x}{\partial r} \cdot \sin \varphi,$$

la variation sinusoïdale en fonction de l'azimut est assurée, attendu que A_z ne dépend que de r, z ainsi que cela ressort des équations (2-12 et 2-30).

Institutul Geologic al României

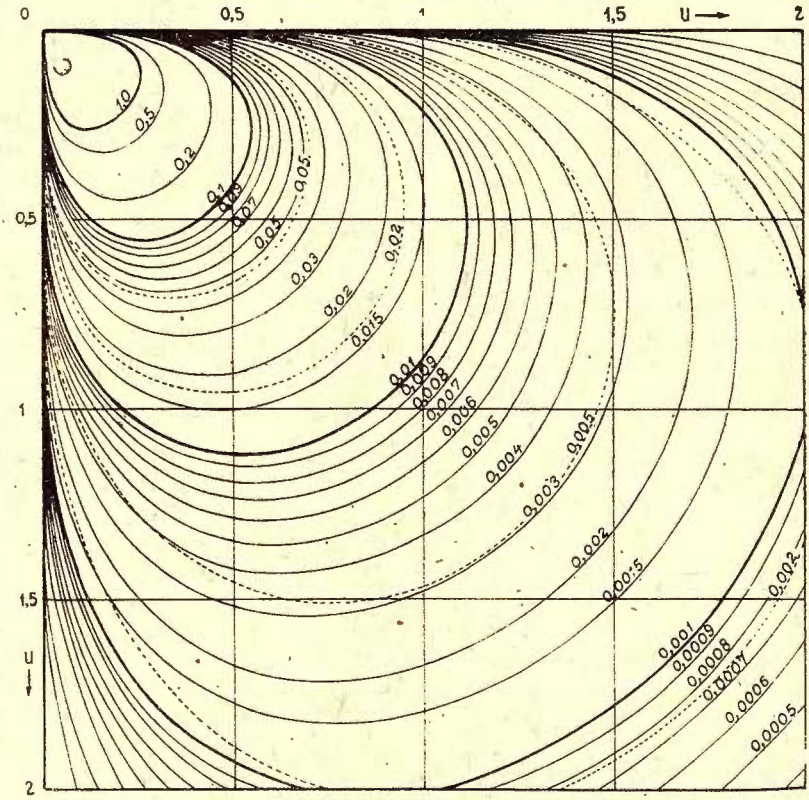

Fig. 13 *a*. — Amplitude de la composante verticale réduite $\overline{j}_z$ de la densité de courant. En pointillé, les lignes d'égale valeur de la même composante en courant continu.

Institutul Geologic al României

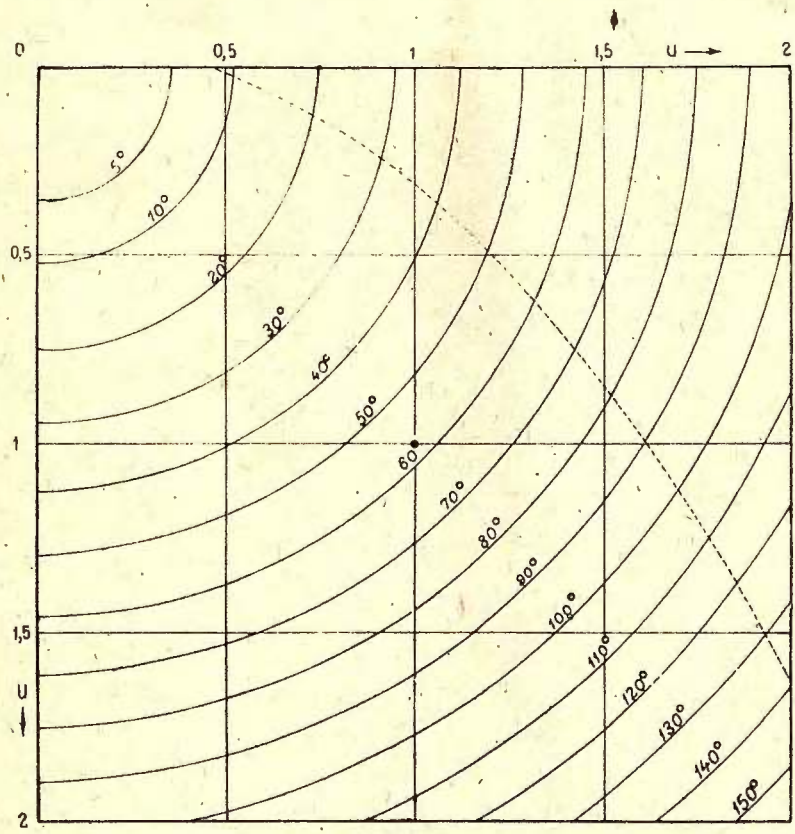

Fig. 13 *b*. — Phase de la composante verticale réduite $\bar{j}_z$.

INSTITUTUL GEOLOGIC - BIBLIOTECA

Institutul Geologic al României

Les composantes cylindriques horizontales H_φ et H_r se déduisent de H_x et H_y par le changement de coordonnées

$$H_\varphi = xr^{-1}H_y - yr^{-1}H_x = xr^{-1}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - yr^{-1}\frac{\partial A_z}{\partial y},$$

(3-27 a, b)

$$H_r = xr^{-1}H_x + yr^{-1}H_y = xr^{-1}\frac{\partial A_z}{\partial y} + yr^{-1}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right).$$

Pour mettre en évidence leur variation en fonction de l'azimut φ, nous remarquerons au préalable que, en vertu de (2-17), la composante verticale A_z du potentiel vecteur peut s'écrire

(3-28 a, b) $$A_z = xr^{-1}F(r,z), \quad F(r,z) = 2\gamma^{-2}\left\{\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial z} + \frac{\partial^3 Q}{\partial r \partial z^2}\right\},$$

où F est une fonction dépendant seulement de r et z. Par suite

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = x.yr^{-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F}{r}\right) = xyr^{-2}\left(\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{F}{r}\right),$$

(3-29 a, b)

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = r^{-1}F + x^2 r^{-2}\left(\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{F}{r}\right).$$

Substituons ces expressions dans les formules (3-28 a, b) et observons que $xr^{-1} = \cos\varphi$, $yr^{-1} = \sin\varphi$; nous aurons

(3-30 a, b) $$H_\varphi = \cos\varphi\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial r}\right), \quad H_r = \sin\varphi\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{F}{r}\right).$$

Ces formules démontrent pour H_φ et H_r la variation sinusoïdale en φ que nous avions annoncée.

En résumé, les quantités $H_\varphi/\cos\varphi$, $H_r/\sin\varphi$, $H_z/\sin\varphi$ ne sont fonctions que des deux variables r et z et, comme telles, sont susceptibles d'une représentation bidimensionnelle.

D'une manière analogue à ce qui a été fait pour le champ électrique, dans le but d'obtenir des grandeurs qui dépendent uniquement de la distance numérique radiale u et de $\mu = \cos\theta$, nous multiplierons les quantités ci-dessus par une constante numérique adéquate — par exemple $|\gamma|^{-2}$ — et nous représente-

Institutul Geologic al României

rons dans les graphiques les *composantes magnétiques réduites*

$$(3\text{-}31)\quad \overline{H}_\varphi = \frac{|\gamma|^{-2}}{\cos\varphi} H_\varphi,\quad \overline{H}_r = \frac{|\gamma|^{-2}}{\sin\varphi} H_r,\quad \overline{H}_z = \frac{|\gamma|^{-2}}{\sin\varphi} H_z .$$

L'interprétation physique de ces composantes réduites est — mutatis mutandis — similaire à celle de la densité électrique: $\overline{H}_\varphi$ représente — à un facteur constant près — le champ magnétique dans le plan $y = 0$ du dipôle, $\overline{H}_r$ et $\overline{H}_z$ les composantes de ce champ dans le plan médian $x = 0$.

Nous examinerons brièvement chacune de ces quantités.

La *composante magnétique tangentielle réduite* a pour expression — d'après (3-30 a)

$$(3\text{-}32)\qquad \overline{H}_\varphi = |\gamma|^{-2}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial r}\right).$$

En vertu des égalités (2-16) et (3-28 b)

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = -2\gamma^{-2}\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma^2\right)\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 P}{\partial z^3}\right\}$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 2\gamma^{-2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + \frac{\partial P}{\partial z}\right)$$

et si l'on tient compte de l'équation de propagation pour Q et P

$$(3\text{-}33)\qquad \overline{H}_\varphi = |\gamma|^{-2}\left\{\frac{F}{r} - 2\frac{\partial P}{\partial z}\right\}.$$

Si nous remplaçons au deuxième membre de cette équation les quantités F et $\partial P/\partial z$ par leurs expressions déduites de (3-28), (2-27) et (2-31) nous trouvons finalement

$$(3\text{-}34)\quad \boxed{\begin{aligned}\overline{H}_\varphi = -|\gamma|^{-2}R^{-2}\{&3\mu^2 I_0K_0 + [\gamma R\mu^2 + \gamma^{-1}R^{-1}.3\mu(1+\mu)]I_0K_1\\ &+ [-\gamma R\mu^2 + \gamma^{-1}R^{-1}.3\mu(1-\mu)]I_1K_0 + (2-3\mu^2)I_1K_1\\ &- 2\mu(3\gamma^{-2}R^{-2} + 3\gamma^{-1}R^{-1} + 2 + \gamma R)e^{-\gamma R}\}.\end{aligned}}$$

A la surface du sol, $(\mu = 0, R = r)$

$$\overline{H}_\varphi = -|\gamma|^{-2}r^{-2}.2\,I_1K_1,$$

égalité qui, aux notations près, est identique à (2-91), trouvée par le calcul direct.

Institutul Geologic al României

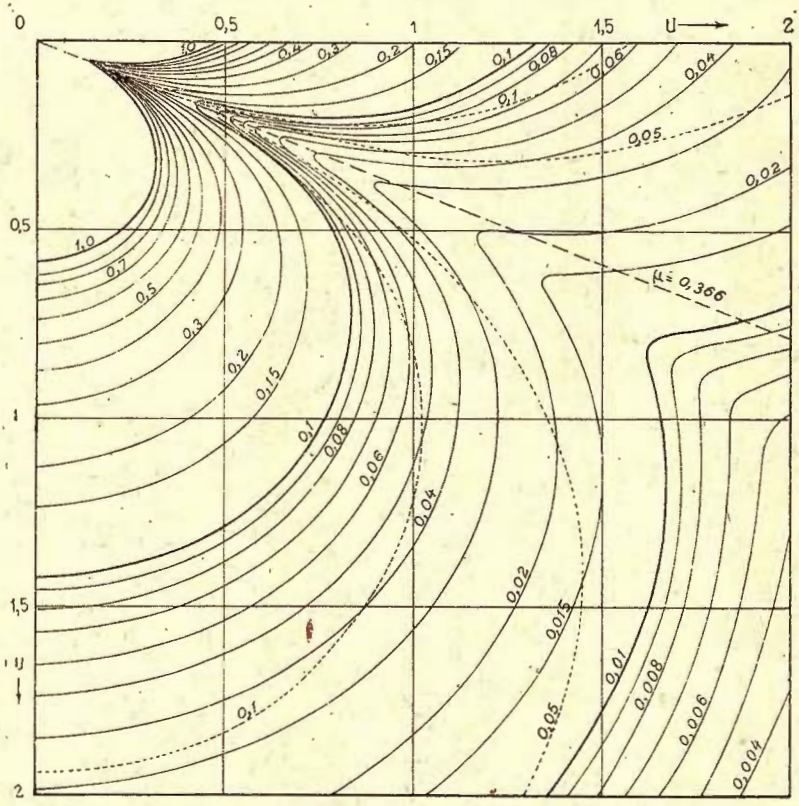

Fig. 14 *a*. — Amplitude de la composante magnétique tangentielle réduite $\overline{H}_\varphi$. En pointillé, les lignes d'égale valeur de la même composante en c. continu.

Institutul Geologic al României

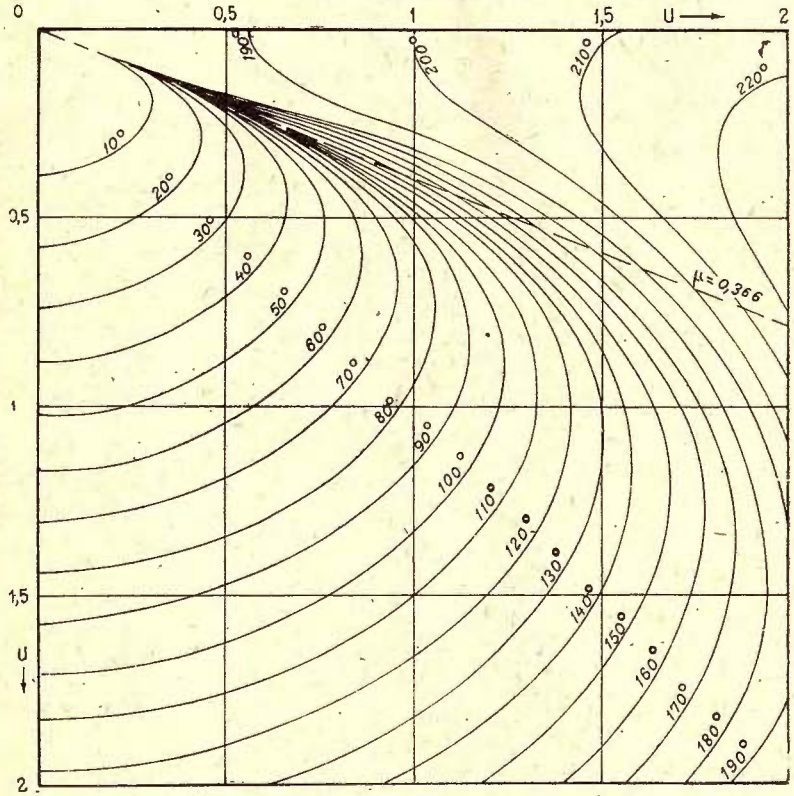

Fig. 14 *b*. — Phase de la composante magnétique tangentielle réduite $\bar{H}_\varphi$.

Institutul Geologic al României

Sur l'axe vertical oz, ($\mu = 1$, $R = z$, $I_0 = 1$, $I_1 = 0$)

$$(3\text{-}35) \qquad \overline{H}_\varphi = -|\gamma|^{-2} z^{-2} \{3K_0(\gamma z) + (\gamma z + 6\gamma^{-1} z^{-1}) K_1(\gamma z) - 2(3\gamma^{-2} z^{-2} + 3\gamma^{-1} z^{-1} + 2 + \gamma z) e^{-\gamma z}\}.$$

En courant continu, la composante tangentielle réduite

$$\overline{H}_{\varphi c} = \frac{|\gamma|^{-2}}{\cos\varphi} H_{\varphi c} = |\gamma|^{-2} R^{-2} \left(2\mu - \frac{1}{1+\mu}\right)$$

s'annule pour $\mu = 0{,}366$.

La figure 14 a montre la distribution des valeurs du module de la composante tangentielle $\overline{H}_\varphi$ en fonction de u et θ, sous forme de lignes $|\overline{H}_\varphi| = \text{const.}$ La même figure contient à titre de comparaison, en trait pointillé, quelques courbes $|\overline{H}_{\varphi c}| = \text{const.}$ (courant continu). La disposition générale des lignes équimodulaires est analogue à celle présentée par la composante électrique radiale $\overline{j}_r$. Alors que les courbes de courant continu sont homothétiques par rapport à l'origine o et présentent deux branches distinctes, tangentes en o au rayon $\mu = 0{,}366$, les courbes de courant alternatif ne montrent qu'un coude aigu au voisinage de ce rayon.

Les valeurs du cas stationnaire sont en général nettement supérieures à celle du regime alternatif, à l'exception du voisinage de ce rayon particulier où les premières tendent vers zéro.

La répartition des phases de la composante $\overline{H}_\varphi$ donne lieu à des remarques analogues à celles occasionnées par la fig. 12 b.

En courant continu, le changement de sens de la composante $\overline{H}_\varphi$ pour $\mu = 0{,}366$ est équivalent à un saut de 180° de la phase. En courant alternatif, cette discontinuité est remplacée par une variation continue, mais rapide, au voisinage de la même ligne, qui — s'infléchissant — renferme dans la direction oz une zone de phases positives comprises entre 0° et 180°. Les lignes de phase comprises entre $\varphi = 180°$ et $\varphi = 225°$ arrivent à la surface du sol et enveloppent la zone des phases $0 < \varphi < 180°$. Enfin, les lignes à $\varphi > 225°$ n'arrivent plus à la surface et présentent dans le sol des asymptotes horizontales.

Institutul Geologic al României

La *composante magnétique radiale réduite* a, en vertu de (3-30 b), l'expression

$$\overline{H}_r = \frac{|\gamma|^{-2}}{\sin\varphi} H_r = |\gamma|^{-2}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{F}{r}\right) \tag{3-37}$$

ou, tenant compte de (2-30), (2-31) et (3-28 a),

$$\begin{aligned}\overline{H}_r = |\gamma|^{-2} R^{-2} \{ & [12\mu^2 - 15\mu^4 + \gamma^2 R^2 (1-\mu^2)\mu^2] I_0 K_0 \\ & + [\gamma R(-1+7\mu^2-\mu^3-6\mu^4) + \gamma^{-1}R^{-1}(12\mu-15\mu^3)(1+\mu)] I_0 K_1 \\ & + [-\gamma R(-1+7\mu^2+\mu^3-6\mu^4) + \gamma^{-1}R^{-1}(12\mu-15\mu^3)(1-\mu)] I_1 K_0 \\ & + [6-22\mu^2+15\mu^4-\gamma^2R^2(1-\mu^2)\mu^2] I_1 K_1 \\ & + 2\mu[(-12+15\mu^2)(\gamma^{-2}R^{-2}+\gamma^{-1}R^{-1}) + 6\mu^2 - 4 + \gamma R\mu^2] e^{\gamma R}\}\end{aligned} \tag{3-38}$$

A la surface du sol ($\mu = 0$, $R = r$)

$$\overline{H}_r = |\gamma|^{-2} r^{-2} \{\gamma r (I_1 K_0 - I_0 K_1) + 6 I_1 K_1\};$$

on retrouve (2-83).

Sur l'axe oz ($\mu = 1$, $R = z$), on vérifie que $\overline{H}_r$ a même valeur que $\overline{H}_\varphi$ de la form. (3-35). Ce fait, pareil à celui rencontré pour le champ électrique, a une explication analogue: sur l'axe oz, le champ magnétique peut être considéré soit comme une composante tangentielle dans le plan $y = 0$, soit comme une composante radiale dans le plan $x = 0$.

En courant continu

$$\overline{H}_{rc} = \frac{|\gamma|^{-2}}{\sin\varphi} H_{rc} = |\gamma|^{-2} R^{-2}\left(\mu + \frac{1}{1+\mu}\right). \tag{3-39}$$

La figure 15 a montre la distribution à l'intérieur du sol du module de la composante radiale réduite en c. alternatif et en c. continu. On peut observer que, à la surface du sol, la composante alternative est plus intense que la composante stationnaire jusqu'à une distance numérique $u \sim 1{,}9$; elle devient inférieure à celle-ci pour les distances plus grandes. On peut en conclure que le champ magnétique présente, lui aussi, un certain skin-effect, mais avec une extension horizontale limitée et des valeurs inférieures à celles du champ électrique E_φ. En particu-

Institutul Geologic al României

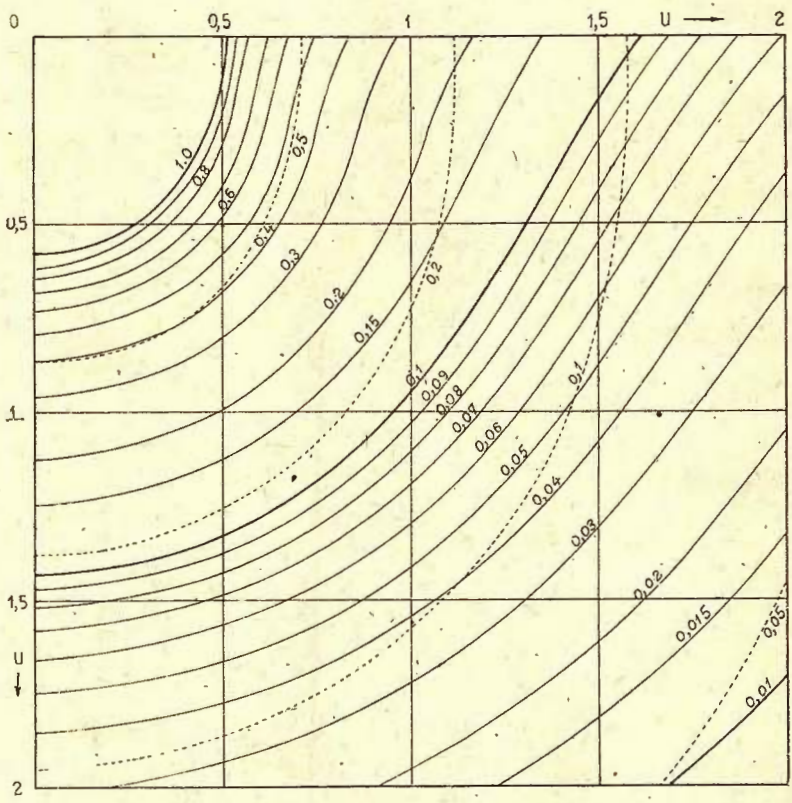

Fig. 15 *a*. — Amplitude de la composante magnétique radiale réduite $\overline{H}_r$. En pointillé, les lignes d'égale valeur de la même composante en courant continu.

Institutul Geologic al României

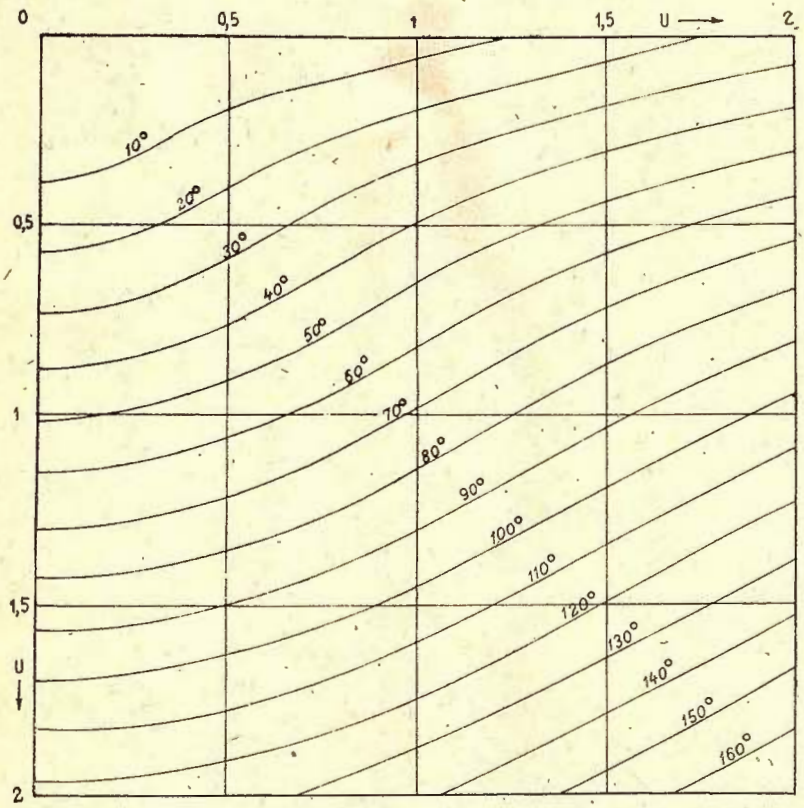

Fig. 15 *b*. — Phase de la composante magnétique radiale réduite $\overline{H}_r$.

INSTITUTUL GEOLOGIC - BIBLIOTECA

IGR Institutul Geologic al României

lier, en direction de l'axe *oz*, les valeurs du champ magnétique alternatif tombent immédiatement au dessous de celles du c. continu.

La figure 15 b donne la répartition des phases de la composante H_r. A cause de certaines difficultés spéciales pour les points voisins de l'origine, où les valeurs des fonctions HANKEL et BESSEL deviennent grandes et le nombre des décimales des tables de JAHNKE-EMDE est insuffisant, il ne nous a pas été possible de figurer exactement la distribution des phases au voisinage immédiat du dipôle. Il existe ici une ligne $\varphi = 0$ et une petite zone de phases négatives dont la répartition exacte ne nous est pas connue.

La composante magnétique verticale réduite a pour expression

$$\overline{H}_z = \frac{|\gamma|^{-2}}{\sin\varphi} H_z = -|\gamma|^{-2} \frac{\partial A_x}{\partial r}, \tag{3-40}$$

ainsi qu'il résulte de l'éq. (3-26); en vertu de (2-30) et des relations de dérivation (2-19, 20, 21, 22), cette expression s'écrit sous forme explicite

$$\begin{aligned}\overline{H}_z = -|\gamma|^{-2} R^{-2} \sqrt{1-\mu^2} \{ & \mu [3 - 15\mu^2 + \gamma^2 R^2 (1-\mu^2)]\, I_0 K_0 \\ & + [\, \gamma R \mu (4 - \mu - 6\mu^2) + \gamma^{-1} R^{-1} (3 - 15\mu^2)(1+\mu)]\, I_0 K_1 \\ & + [-\gamma R \mu (4 + \mu - 6\mu^2) + \gamma^{-1} R^{-1} (3 - 15\mu^2)(1-\mu)]\, I_1 K_0 \\ & + \mu [-13 + 15\mu^2 - \gamma^2 R^2 (1-\mu^2)]\, I_1 K_1 \\ & + 2[(15\mu^2 - 3)(\gamma^{-2} R^{-2} + \gamma^{-1} R^{-1}) + 6\mu^2 - 1 + \gamma R \mu^2] e^{-\gamma R} \}.\end{aligned} \tag{3-41}$$

A la surface du sol ($\mu = 0$, $R = r$), en vertu de (2-4)

$$\begin{aligned}\overline{H}_z &= -|\gamma|^{-2} r^{-2} \{ 3\gamma^{-1} r^{-1} (I_0 K_1 + I_1 K_0) + 2[-3(\gamma^{-2} r^{-2} + \gamma^{-1} r^{-1}) - 1]\, e^{-\gamma r} \} \\ &= 2|\gamma|^{-2} r^{-2} \{ (3\gamma^{-2} r^{-2} + 3\gamma^{-1} r^{-1} + 1)\, e^{-\gamma r} - 3\gamma^{-2} r^{-2} \},\end{aligned}$$

équation équivalente à la relation (2-78), obtenue par le calcul direct.

Sur l'axe *oz*, H_z est identiquement nulle.

Institutul Geologic al României

En courant continu, on peut démontrer que la composante magnétique verticale a pour expression

$$H_{zc} = -\frac{\sin\varphi \cdot \sin\theta}{R^2}, \tag{3-42}$$

sa valeur réduite étant par conséquent

$$\overline{H}_{zc} = \frac{|\gamma|^{-2}}{\sin\varphi} H_{zc} = -|\gamma|^{-2} R^{-2} \sqrt{1-\mu^2}. \tag{3-43}$$

Si l'on compare (3-43) et (3-41), on constate que le crochet du deuxième membre de cette dernière équation est égal au rapport $\overline{H}_z/\overline{H}_{zc}$ entre les composantes magnétiques verticales en c. alternatif et c. continu.

La figure 16 a présente, sous forme de lignes d'égal module, la distribution à l'intérieur du sol de l'intensité de la composante réduite $\overline{H}_z$. En trait pointillé ont été figurées les courbes d'égal module de la composante réduite $\overline{H}_{zc}$ en c. continu. On remarque que, dans la zone considérée, les courbes du courant alternatif ont une forme très analogue à celles du c. continu. L'examen des valeurs numériques inscrites sur les lignes montre cependant que la décroissance de la composante alternative en fonction de la distance est beaucoup plus rapide que pour la composante stationnaire.

Le fait qu'à la surface du sol H_z décroît plus vite que H_φ et H_r (à grande distance comme r^{-4}, alors que pour les composantes horizontales la décroissance est en r^{-3}) explique pourquoi dans la figure 16 a, les courbes $|\overline{H}_z| = \text{const.}$ arrivent à peu près normalement à la surface du sol; l'amortissement dans le sol n'est pas nettement supérieur à celui de la surface dans la zone considérée.

La fig. 16 b montre la distribution des phases de la composante H_z. Par opposition avec les autres composantes magnétiques, on n'a pas à signaler des anomalies de phase importantes au voisinage de la surface ou de l'émetteur. Vu qu'à la surface la phase se stabilise à la valeur $\pi/2$ à grande distance numérique de l'origine, les lignes d'égale phase $\varphi > \pi/2$ n'arrivent pas

Institutul Geologic al României

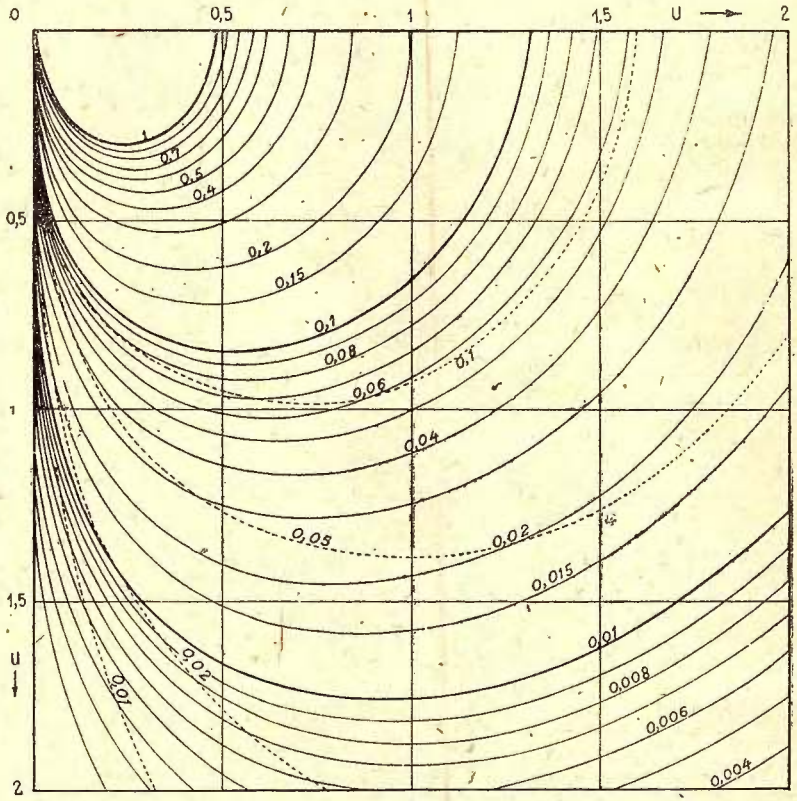

Fig. 16 *a*. — Amplitude de la composante magnétique verticale réduite $\overline{H}_z$. En pointillé, les lignes d'égale valeur de la même composante en courant continu.

Institutul Geologic al României

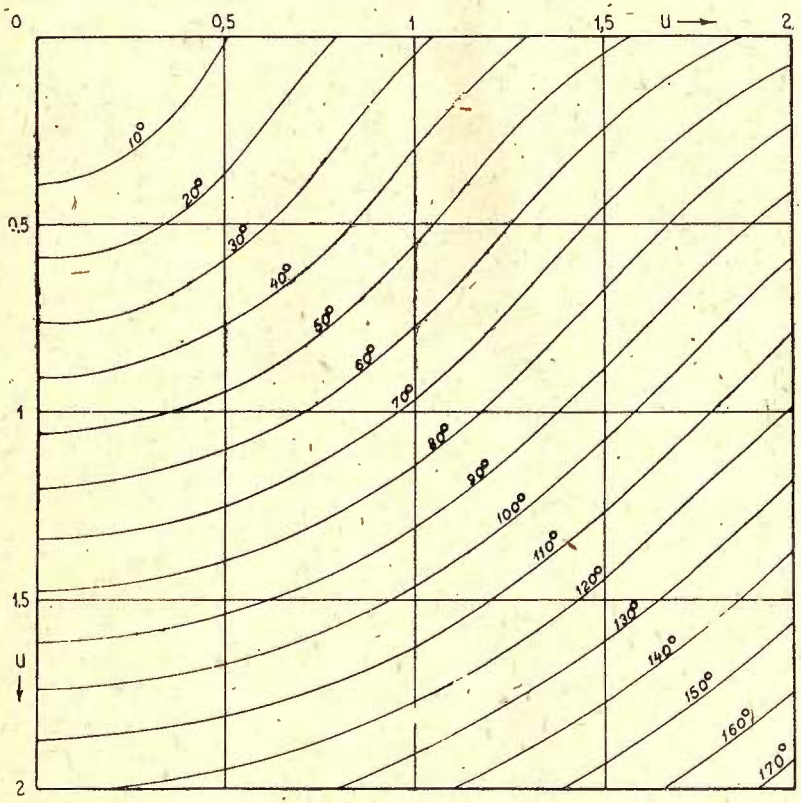

Fig. 16 *b*. — Phase de la composante magnétique veticale réduite $\overline{H}_z$.

INSTITUTUL GEOLOGIC - BIBLIOTECA

IGR Institutul Geologic al României

jusqu'à la surface mais s'approchent en oscillant des asymptotes horizontales à l'intérieur du sol.

Comme dans le cas du champ électrique, on peut se proposer de trouver les points où le champ magnétique a une *polarisation rectiligne*. En dehors du plan $y = 0$, qui satisfait tout entier à cette condition, il existe aussi de tels points dans le plan $x = 0$. On peut les obtenir, en principe, par voie graphique, en déterminant les intersections des lignes équiphases — de cote égale — des deux graphiques 15 b et 16 b. L'angle d'intersection des lignes équiphases étant très aigu, la position des points d'intersection n'est pas bien determinée, ce qui nous a incité à renoncer à la représentation de ce lieu géométrique.

14. *Calculs numériques.* — Le but principal de ce travail a été de mettre à la disposition des prospecteurs une image exacte de la distribution du champ électromagnétique alternatif dans le cas de l'émetteur dipôle; aussi trouvons-nous nécessaire de donner quelques indications sur la manière dont on été conduits les calculs numériques qui ont permis d'établir nos graphiques, afin que l'on puisse éventuellement compléter ce calculs pour d'autres intervalles jugés intéressants.

En premier lieu, en partant du travail deja cité de R. M. FOSTER, on a établi les formules théoriques explicites pour les deux composantes du potentiel vecteur et les six composantes réduites du champ électromagnétique. Toutes les expressions obtenues ont la forme générale

$$\alpha I_0 K_0 + \beta I_0 K_1 + \gamma I_1 K_0 + \delta I_1 K_1 + \varepsilon e^{-\gamma R}, \tag{3-44}$$

où a, β, γ, δ, ε sont des fonctions algébriques rationnelles de $\gamma R = 2u\sqrt{i}$ et $\mu = \cos\theta$.

La première partie des calculs numériques a comporté la détermination d'une série de valeurs pour les fonctions de BESSEL

$$I_0 = I_0\left\{\frac{\gamma R}{2}\left(1-\frac{z}{R}\right)\right\} = I_0[u(1-\mu)\sqrt{i}],\ I_1 = I_1[u(1-\mu)\sqrt{i}]$$

et HANKEL

$$K_0 = K_0\left\{\frac{\gamma R}{2}\left(1+\frac{z}{R}\right)\right\} = K_0[u(1+\mu)\sqrt{i}], K_1 = K_1[u(1+\mu)\sqrt{i}].$$

Institutul Geologic al României

On a choisi pour μ les valeurs 0; 0,1; 0,2 ... 0,9; 1, pour u les valeurs 0; 0,1 ... 2,4; 2,5 et l'on a établi pour les fonctions utiles des tableaux de valeurs comportant 11 colonnes $\mu = \text{const.}$ et 26 lignes $u = \text{const.}$ Les premiers de ces tableaux concernent les quantités $h = u(1-\mu)$ et $l = u(1+\mu)$ qui interviennent comme arguments dans les fonctions de BESSEL et HANKEL. Par suite des valeurs choisies pour u et μ, les arguments ainsi obtenus sont des nombres simples pour lesquels les tables de JAHNKE-EMDE (Teubner, II Auflage, 1933), donnent les valeurs correspondantes des fonctions HANKEL et BESSEL. Dans l'emploi de ces Tables, on a eu en vue les identités suivantes, qui sont des conséquences des définitions (2—3)

$$\begin{cases} \operatorname{Re} I_0(x\sqrt{i}) = \operatorname{Re} J_0(x\sqrt{i}), \\ \operatorname{Im} I_0(x\sqrt{i}) = -\operatorname{Im} J_0(x\sqrt{i}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} I_1(x\sqrt{i}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\{-\operatorname{Re}[\sqrt{i}\,J_1(x\sqrt{i})] + \operatorname{Im}[\sqrt{i}\,J_1(x\sqrt{i})]\}, \\ \operatorname{Im} I_1(x\sqrt{i}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\{\operatorname{Re}[\sqrt{i}\,J_1(x\sqrt{i})] + \operatorname{Im}[\sqrt{i}\,J_1(x\sqrt{i})]\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} K_0(x\sqrt{i}) = -\frac{\pi}{2}\operatorname{Im} H_0^{(1)}(x\sqrt{i}), \\ \operatorname{Im} K_0(x\sqrt{i}) = -\frac{\pi}{2}\operatorname{Re} H_0^{(1)}(x\sqrt{i}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} K_1(x\sqrt{i}) = -\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\{\operatorname{Re}[\sqrt{i}\,H_1^{(1)}(x\sqrt{i})] + \operatorname{Im}[\sqrt{i}\,H_1^{(1)}(x\sqrt{i})]\}, \\ \operatorname{Im} K_1(x\sqrt{i}) = \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\{-\operatorname{Re}[\sqrt{i}\,H_1^{(1)}(x\sqrt{i})] + \operatorname{Im}[\sqrt{i}\,H_1^{(1)}(x\sqrt{i})]\}. \end{cases}$$

Après la constitution des tableaux des fonctions I_0, I_1, K_0, K_1 et des produits I_0K_0, I_0K_1, I_1K_0, I_1K_1, on a calculé — pour les mêmes séries de valeurs de u et μ — les coefficients α, β, γ, δ, ε de (3-44) pour chacune des 6 composantes électromagnétiques réduites et, finalement, ces composantes elles-mêmes sous forme de partie réelle, partie imaginaire, module et phase.

Institutul Geologic al României

Note concernant le potentiel vecteur électrique du dipôle quasistationnaire.

La forme sous laquelle a été présentée la théorie du dipôle T.P.S. dans les chapitres II et III est identique a celle adoptée dans nos articles de la revue Beiträge zur angew. Geophysik *(loc. cit.)*. La simplification que l'on obtient dans la théorie des antennes par l'introduction d'un potentiel vecteur électrique, reconnue ultérieurement, nous a incité à déterminer ce champ vectoriel pour le cas spécial du dipôle T.P.S. quasistationnaire. Attendu que les résultats concernant les composantes électromagnétiques sont évidemment les mêmes que si l'on part — avec SOMMERFELD-HOERSCHELMANN — d'un p. v. magnétique, nous nous bornerons dans ce qui suit à une esquisse de la théorie du p. v. électrique, laquelle a pour notre sujet une valeur simplement introductive.

Un potentiel vecteur électrique C, duquel le champ é.-m. dérive par les équations

$$(3\text{-}45\ a, b)\quad 4\pi j = \operatorname{rot} C, \quad H = C - \gamma^{-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} C,$$

et qui satisfait également à l'équation de propagation

$$(3\text{-}46)\qquad \Delta C - \gamma^2 C = 0$$

résout d'une manière formelle les équations générales (2-7) du champ quasistationnaire.

On voit par ailleurs que la solution de ces équations peut s'écrire en fonction de $P = \frac{e^{-\gamma R}}{R}$ et $Q = I_0 K_0$

$$(3\text{-}47\ a)\quad \begin{cases} 4\pi j_x = -2\dfrac{\partial^3 Q}{\partial y^2 \partial z} + 2\dfrac{\partial^2 P}{\partial z^2}, \\ 4\pi j_y = \quad 2\dfrac{\partial^3 Q}{\partial x\, \partial y\, \partial z}, \\ 4\pi j_z = -2\dfrac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial z}, \end{cases}$$

Institutul Geologic al României

$$(3\text{-}47\ b)\quad \begin{cases} H_x = 2\gamma^{-2}\left\{\dfrac{\partial^4 Q}{\partial x\,\partial y\,\partial z^2} + \dfrac{\partial^3 P}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\right\}, \\ H_y = 2\gamma^{-2}\left\{\dfrac{\partial^4 Q}{\partial y^2\,\partial z^2} - \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\dfrac{\partial P}{\partial z}\right\}, \\ H_z = 2\gamma^{-2}\left\{-\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\dfrac{\partial^2 Q}{\partial y\,\partial z} + \dfrac{\partial^3 P}{\partial y\,\partial z^2}\right\}. \end{cases}$$

On vérifie facilement que ces expressions coïncident avec la forme scalaire des égalités (3-45) si l'on adopte pour le potentiel vecteur électrique les composantes

$$(3\text{-}48)\quad \boxed{C_x = 0\ ,\quad C_y = -2\frac{\partial P}{\partial z}\ ,\quad C_z = -2\frac{\partial^2 Q}{\partial y\,\partial z}}.$$

Remarquons tout de suite que C_y ne dépend que de la fonction P et C_z, que de la fonction Q. *Les fonctions* P *et* Q *de* FOSTER *représentent donc — par leurs dérivées partielles — les composantes du potentiel vecteur électrique*; elles trouvent ainsi une interprétation physique concrète, inapparente dans le p. v. magnétique.

Toute la théorie de l'émetteur T.P.S. peut être développée au moyen des formules (3-47) à partir des expressions (3-48) du p. v. électrique, d'un manière analogue à celle présentée dans notre travail, — qui peut être consideré comme une simple suite de la théorie de SOMMERFELD-HOERSCHELMANN.

Institutul Geologic al României

CHAPITRE IV.

VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES.

15. *Recherches de H. von Ludwiger.* — Les résultats obtenus par voie strictement théorique dans les chapitres précédents exigent une confrontation avec les données de l'expérience. Quoique le nombre des recherches géoélectriques en courant alternatif, publiées jusqu'à ce jour, soit considérable, un très petit nombre de ces travaux se rapportent aux champs normaux, dont l'intérêt pratique ne semble pas avoir été suffisament reconnu. D'ailleurs, tout ce que le sous-sol réel peut offrir comme disposition ordonnée suffisamment approchée de la constitution homogène et isotrope est la stratification horizontale. Les mesures précises du champ d'un dipôle à basse fréquence en présence d'un sous-sol ayant une telle stratification sont cependant aûssi très rares — à notre connaissance — dans la littérature scientifique. Quelques champs normaux publiés par l'ancienne société Elbof, qui s'est beaucoup occupée des mesures électromagnétiques au moyen d'émetteurs de courte longueur, ne présentent ni la symétrie parfaite imposée par la stratification horizontale, ni des données suffisantes pour une confrontation avec les résultats du calcul.

Une étude déjà ancienne et presque complète du champ du dipôle est celle de H. von LUDWIGER *(loc. cit.)*. Quoique les courbes de différents types mesurées par cet auteur présentent de nombreuses déformations, dues — selon toutes probabilité — aux irrégularités de la surface, celles-ci peuvent servir en pre-

Institutul Geologic al României

mière approximation à la vérification des résultats théoriques. Nous présentons ci-dessous quelques-unes des observations que le lecteur pourra compléter en présence des graphiques de v. Ludwiger et de ceux contenus dans le présent travail; ces dessins seront indiqués par les numéros correspondants des figures, suivis respectivement des lettres L. (v. Ludwiger) et S. (Stefanescu). Nous aurons en vue dans la comparaison de ces courbes que, d'après le paragraphe 11, l'unité de distance numérique dans les expériences de L. est égale à 250 m.

Les lignes d'égale amplitude du grand axe de l'ellipse électrique horizontale (10 L. et 4 S.) présentent des formes semblables, quoique la décroissance radiale du champ expérimental paraît être plus rapide que r^3. Une légère ovalisation dans la direction oy est plus accusée dans les courbes théoriques.

Les amplitudes magnétiques horizontales (11 L. et 9 S.) ont dans les deux cas des distributions semblables. On retrouve par voie expérimentale l'ovalisation progressive à grande distance dans la direction oy, prévue par la théorie.

Les lignes d'égale phase de la composante horizontale maxima (13 L.) ont la même forme générale que celle calculée théoriquement (10 S.); les valeurs inscrites sur les lignes expérimentales ont cependant un point de départ certainement erroné. L. affirme lui-même dans son texte (p. 216) que la décroissance de la phase de la composante H_y est plus lente que celle de la composante H_z et que la phase au voisinage de l'émetteur est la-même pour ces deux grandeurs. Ces deux affirmations, théoriquement exactes, sont incompatibles avec la valeur 100 sur la première ligne équiphase de la figure 13 L.

Les lignes d'égale phase (14 L.) et d'égale amplitude (15 L.) de la composante verticale H_z sont semblables à celles qui résultent de la théorie.

Les lignes expérimentales d'égale ellipsité du vecteur magnétique horizontal (17 L.) sont ouvertes, mais présentent des valeurs du même ordre de grandeur que les courbes théoriques (7 S.).

Institutul Geologic al României

La ligne d'égale ellipsité — 0,3 — de la composante électrique horizontale (16 L.) se place bien autour du point prévu pour l'ellipsité maxima (4 S.).

En résumé, à l'exception de la série des courbes équiphases du champ électrique horizontal (12 L.), d'allure très irrégulière, qui ne satisfont pas aux prévisions du calcul, il n'existe pas de divergence inadmissible entre les courbes théoriques et celles établies par l'expérience.

En ce qui concerne la réalisation pratique des mesures du champ du dipôle à basse fréquence, nous remarquerons que la transmission en direction oblique — par rapport à l'émetteur — de l'amplitude et de la phase au moyen d'une ligne de liaison, depuis l'émetteur jusqu'au récepteur, ainsi que cela a été réalisé dans les expériences de L., est très dangereuse pour l'exactitude des résultats, à cause de l'intervention massive des courants parasites. Des mesures relatives strictement locales seraient seules susceptibles, à notre avis, de décider de la valeur d'une théorie, telle que celle qui est exposée dans le présent travail.

16. *Expériences avec l'émetteur T.P.S., de T. P. Ghițulescu, M. Socolescu et S. Stefanescu.* — Des expériences déjà anciennes (Août 1931) mais encore inédites de l'Institut Géologique de Roumanie semblent confirmer d'une manière satisfaisante les prévisions théoriques.

En vue de l'application sur le terrain des méthodes électromagnétiques à émetteur court, une équipe de l'I.G.R. a entrepris une série de mesures à la station de l'Institut Agronomique de Seceleanu, district de Ialomitza. Le but de ces recherches était la mesure effective des composantes magnétiques du champ de l'émetteur T.P.S. dans des conditions approchées de celles qui caractérisent le champ normal.

Le choix de la station Seceleanu a été déterminé par le fait qu'en cette région la structure du sous-sol de la plaine du Baragan est bien connue, à la suite d'un sondage — ayant une profondeur de 755 m — exécuté au village voisin de Mărculești. Les couches sédimentaires — Quaternaire, Pliocène, Sar-

Institutul Geologic al României

matien et Crétacé — parfaitement planes et horizontales, sont composées d'une alternance de sables, argiles et marnes. Au point de vue électrique, l'homogénéité est très bonne en direction horizontale, mais n'est certainement qu'approchée en direction verticale. Les conditions géologiques pour l'établissement d'un champ normal T.P.S. pas trop eloigné du cas normal paraissent être suffisament bien réalisées dans la région considérée.

L'appareillage employé dans ces mesures — constitué par un groupe émetteur et un groupe récepteur — est celui qui a été décrit dans la publication [22] de T. P. GHIȚULESCU, M. SOCOLESCU et S. STEFANESCU.

Le groupe émetteur du champ é. m. à fréquence musicale était formé par un groupe générateur de courant en liaison avec un transformateur; le secondaire de ce transformateur était relié au sol par l'intermédiaire d'un câble et de deux prises de terre métalliques. Le groupe électrogène était constitué par un moteur à explosion — type Deutz M. A. 511 de 5 H.P. — ayant une vitesse moyenne de 1200 tours/min et d'un alternateur Bosch-Stockdorfer M/1940. Ce générateur était construit en vue de fournir à une vitesse de rotation de 1800 tours/min, une puissance de 1000 w. et une intensité de 12 amp. à la fréquence de 540 per/sec. Afin de réaliser des intensités suffisantes même à des fréquences inférieures à 540, l'inducteur de l'alternateur était alimenté par une petite dynamo actionnée par le même moteur Deutz. On a pu obtenir de cette manière une intensité de courant suffisante à la fréquence de 370 cycles sec., laquelle a été la fréquence adoptée au cours des mesures.

Afin de pouvoir introduire dans le sol un courant de 3 amp. sous une tension de 300 v., il a été nécessaire d'intercaler un transformateur entre le groupe électrogène et le câble de l'émetteur T.P.S.

Le câble, du type souple, avait une longueur de 100 m. Les prises de terre étaient formées de morceaux de rails effilés en pointe.

Le *groupe récepteur*, dont le but était de mesurer l'amplitude des composantes magnétiques, comprenait un cadre radio-

Institutul Geologic al României

goniométrique, un amplificateur, un redresseur et un microampèremètre.

Le cadre était formé par une bobine circulaire ayant un diamètre de 650 mm. Le plan du cadre pouvait être orienté arbitrairement dans l'espace au moyen d'un axe horizontal et d'un axe vertical.

Le bobinage était composé de 300 spires de fil métallique, ayant un diamètre de 0,2 mm, isolé par 2 enveloppes de soie. La résistance totale du bobinage était de 51 Ω, la self de 54 m. H. et la surface active de 10^6 cm.

L'amplificateur comportait 4 étages à triodes, reliés par transformateurs. Le grand nombre d'étages était nécessaire à cette époque, où les pentodes étaient encore inconnues. La variation du rapport d'amplification s'obtenait par changement du potentiel de grille des lampes. L'alimentation était fournie par des batteries d'accumulateurs au ferro-nickel.

Le courant produit par l'amplificateur était rectifié par un redresseur à l'oxyde de cuivre. Les résultats obtenus étaient satisfaisants, à condition que l'appareil fût tenu bien à l'écart des variations de température; à cet effet, le redresseur était monté dans une boîte de liège.

Le courant redressé était mesuré par un microampèremètre portatif Weston. Cet appareil a une sensibilité de 0,2 μA par division du cadran et une résistance interne de 120 Ω.

Le principe de la méthode de mesure était le suivant:

Dans des conditions d'alimentation déterminées, on peut admettre que le groupe amplificateur-redresseur établit une correspondance bien définie entre l'intensité du courant qui entre et celle qui sort de ce groupe d'appareils.

Le courant d'entrée est d'ailleurs proportionnel à l'amplitude $|H|$ de la composante magnétique mesurée. Si donc on désigne par I l'intensité du courant qui agit sur le microampèremètre, on est en droit d'écrire

$$I = f(|H|),$$

où f désigne une certaine fonction qui peut être déterminée par un étalonnage expérimental du groupe récepteur.

Institutul Geologic al României

Afin de réaliser cet étalonnage, le groupe récepteur a été transporté en certaines stations de base B, B', B'' placées sur l'axe de symétrie *oy* de l'émetteur — B à 200 m., B' à 400 m., B'' à 500 m. du centre *o*. D'après la théorie, le plan de l'ellipse de vibration du vecteur H doit être identique en ces points avec le plan de symétrie de l'émetteur. Cette prévision était bien confirmée par l'expérience: l'aiguille du microampèremètre revenait exactement au zéro lorsque le plan du cadre était amené en coincidence avec le plan $x = 0$.

Grâce à cette verticalité du plan de polarisation de H dans les stations de base, on a pu effecteur l'étalonnage du cadre en donnant à celui-ci des azimuts bien définis (5^c, 10^c... 100^c) par rapport à l'azimut d'extinction du courant. On a introduit de cette manière dans le cadre des fractions bien connues de la composante horizontale H_{yB} à la station de base. Si α est l'angle du plan du cadre avec le plan d'extinction, on aura — en admettant l'existence d'un champ H strictement élliptique —

$$H_\alpha = H_{yB} \sin \alpha ,$$

où H_α désigne la composante horizontale qui induit effectivement une f.é.m. dans le cadre. On réalise ainsi une composante inductive exactement proportionnalle à sin α, ce qui permet de tracer expérimentalement la courbe d'étalonnage $I = f(H_\alpha)$.

Cette courbe donne directement en unités H_B, pour une lecture déterminée du microampèremètre, la valeur correspondante de l'amplitude d'une composante de H en tout autre point de mesure.

La valeur de la méthode dépend de la constance (fidélité) du groupe récepteur au cours des mesures. Afin de s'assurer de cette constance, on est revenu systématiquement à la station de base à la fin de chaque série de mesures, dans le but d'y relever une nouvelle courbe d'étalonnage, dont on a vérifié de cette manière la stabilité.

Nous donnons ci-dessous, à titre d'exemple, les résultats obtenus dans la station B avant et après les mesures effectuées sur les cercles $r = 250$ m. et $r = 300$ m. (Tableau III).

Institutul Geologic al României

TABLEAU III

Étalonnage de l'appareil dans la station de Base B.

Azimut du cadre α^c	0	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	100^c
Fractions de $H_{yB} = \sin\alpha$.	0	0,0785	0,1564	0,2334	0,3090	0,3827	0,4540	0,5878	0,7071	0,8090	0,8910	0,9511	1
Étalonnage initial (μA) . .	0	3	12	26	46	68	90	132	164	190	209	222	232
	0	3	12	26	46	66	90	129	164	188	208	222	232
Étalonnage final (μA) . .	0	3	12,5	27	47	69	92	132	166	192	211	224	234
	0	3	13	27	47	68	92	132	166	191	211	223	234

On voit que la fonction d'étalonnage a gardé une invariance assez satisfaisante, fait qui a été vérifié aussi dans les autres stations de base, B′ (400 m) et B″ (500 m). Cependant, attendu que l'instabilité n'est pas du tout négligéable, nous en tiendrons compte d'une manière explicite dans la présentation des résultats expérimentaux.

Les mesures des trois composantes H — radiale H_r, tangentielle H_φ, verticale H_z — ont été exécutées en 36 stations disposées à l'intérieur d'un quadrant, aux distances $r = 250, 300, 350, 400, 450, 500$ m et pour les azimuts $\varphi = 0°, 18°, 36°, 54°, 72°, 90°$.

Dans chacune de ces stations et pour chaque composante H ont été effectuées deux lectures — généralement concordantes; leur moyenne a été adoptée comme lecture exacte.

Afin de tenir compte de la variation de la courbe d'étalonnage, nous avons noté dans le tableau IV — qui contient la totalité des résultats de mesure — les deux valeurs que font correspondre à chaque lecture les deux

Institutul Geologic al României

TABLEAU IV

Mesures d'amplitude — *Base B* (200 m)

Az. φ		0°		18°		36°		54°		72°		90°	
$r = 250$ m.	$H\varphi$	0,410 0,418	0,414	0,372 0,378	0,375	0,288 0,294	0,291	0,212 0,226	0,219	0,104 0,104	0,104	0 0	0
	H_r	0 0	0	0,204 0,210	0,207	0,382 0,386	0,384	0,518 0,528	0,523	0,588 0,596	0,592	0,612 0,620	0,616
	H_z	0 0	0	0,128 0,132	0,130	0,228 0,232	0,230	0,324 0,328	0,326	0,360 0,364	0,362	0,364 0,368	0,366
$r = 300$ m.	$H\varphi$	0,240 0,244	0,242	0,230 0,236	0,233	0,184 0,190	0,187	0,116 0,116	0,116	0,054 0,054	0,054	0 0	0
	H_r	0 0	0	0,136 0,136	0,136	0,260 0,264	0,262	0,344 0,350	0,347	0,402 0,408	0,405	0,412 0,420	0,416
	H_z	0 0	0	0,076 0,076	0,076	0,140 0,140	0,140	0,176 0,180	0,178	0,206 0,210	0,208	0,224 0,228	0,226
$r = 350$ m.	$H\varphi$	0,146 0,156	0,151	0,136 0,150	0,143	0,116 0,128	0,122	0,060 0,078	0,069	0,048 0,060	0,054	0 0	0
	H_r	0 0	0	0,078 0,092	0,085	0,170 0,184	0,177	0,236 0,254	0,245	0,270 0,286	0,278	0,276 0,290	0,283
	H_z	0 0	0	0,042 0,052	0,047	0,084 0,096	0,090	0,090 0,102	0,096	0,120 0,132	0,126	0,130 0,142	0,136

Institutul Geologic al României

Tableau IV (suite)

Base B' (400 m)

Az. φ		0°		18°		36°		54°		72°		90°	
$r = 400$ m.	$H\varphi$	0,50 0,52	0,51	0,48 0,51	0,495	0,38 0,38	0,38	0,28 0,28	0,28	0,16 0,16	0,16	0 0	0
	H_r	0 0	0	0,32 0,32	0,32	0,57 0,59	0,58	0,78 0,83	0,805	0,96 0,99	0,975	1,00 1,00	1,00
	H_z	0 0	0	0,14 0,14	0,14	0,22 0,22	0,22	0,31 0,31	0,31	0,36 0,36	0,36	0,37 0,37	0,37
$r = 450$ m.	$H\varphi$	0,37 0,37	0,37	0,34 0,34	0,34	0,285 0,285	0,285	0,195 0,195	0,195	0,100 0,100	0,100	0 0	0
	H_r	0 0	0	0,215 0,215	0,215	0,41 0,425	0,418	0,57 0,595	0,583	0,66 0,685	0,673	0,67 0,70	0,685
	H_z	0 0	0	0,08 0,08	0,08	0,17 0,17	0,17	0,205 0,205	0,205	0,215 0,215	0,215	0,225 0,225	0,225

Base B'' (500 m)

Az. φ		0°		18°		36°		54°		72°		90°	
$r = 500$ m.	$H\varphi$	0,52 0,52	0,52	0,48 0,50	0,49	0,41 0,42	0,415	0,31 0,31	0,31	0,20 0,20	0,20	0 0	0
	H_r	0 0	0	0,31 0,33	0,32	0,60 0,61	0,605	0,82 0,86	0,84	0,95 0,95	0,95	1,00 1,00	1,00
	H_z	0 0	0	— —	—	0,20 0,20	0,20	0,27 0,27	0,27	0,31 0,31	0,31	— —	—

Rapport des unités d'amplitude:

1 B' = (0,225 ± 0,013) B; 1 B'' = 0,126 B.

Institutul Geologic al României

courbes d'étalonnage — initial et final — dans la même station de base.

Nous pensons avoir bien fait ressortir de cette manière la dispersion des valeurs mesurées, due à l'infidélité de l'appareillage. La moyenne des deux valeurs ainsi obtenues constitue le résultat que l'on a adopté pour la station et la composante envisagée.

Le fait d'avoir employé pour la mesure de l'intensité magnétique différentes unités conventionnelles, à savoir l'intensité de la composante horizontale:

de la station B, pour les mesures exécutées sur les cercles

$$r = 250,\ 300 \text{ et } 350 \text{ m};$$

de la station B′, pour les mesures exécutées sur les cercles

$$r = 400 \text{ et } 450 \text{ m};$$

de la station B″, pour les mesures exécutées sur le cercle

$$r = 500 \text{ m},$$

nous a determiné à choisir parmi les résultats théoriques — en vue de la confrontation avec l'expérience — ceux qui sont indépendants de l'unité de mesure. Nous insisterons plus spécialement sur deux types de lois, qui présentent ce caractère: *lois de variation azimutale* et *lois des rapports des amplitudes locales.*

a) Lois de variation azimutale. On a vu que, théoriquement, si l'on se déplace sur un cercle de rayon r autour de l'émetteur T.P.S., assimilé à un dipôle horizontal, pour r suffisamment grand

$|H_r|$ et $|H_z|$ doivent varier proportionnellement à $\sin\varphi$,
$|H_\varphi|$ doit varier proportionnellement à $\cos\varphi$.

Les graphiques 17 présentent la distribution des quantités

$$\frac{|H_r|}{\sin\varphi}\ ,\quad \frac{|H_z|}{\sin\varphi}\ ,\quad \frac{|H_\varphi|}{\cos\varphi}$$

en fonction de l'azimut pour les six longueurs de rayon considérées. Les unités d'amplitude sont celles — conventionnelles — qui ont été citées précédemment.

Institutul Geologic al României

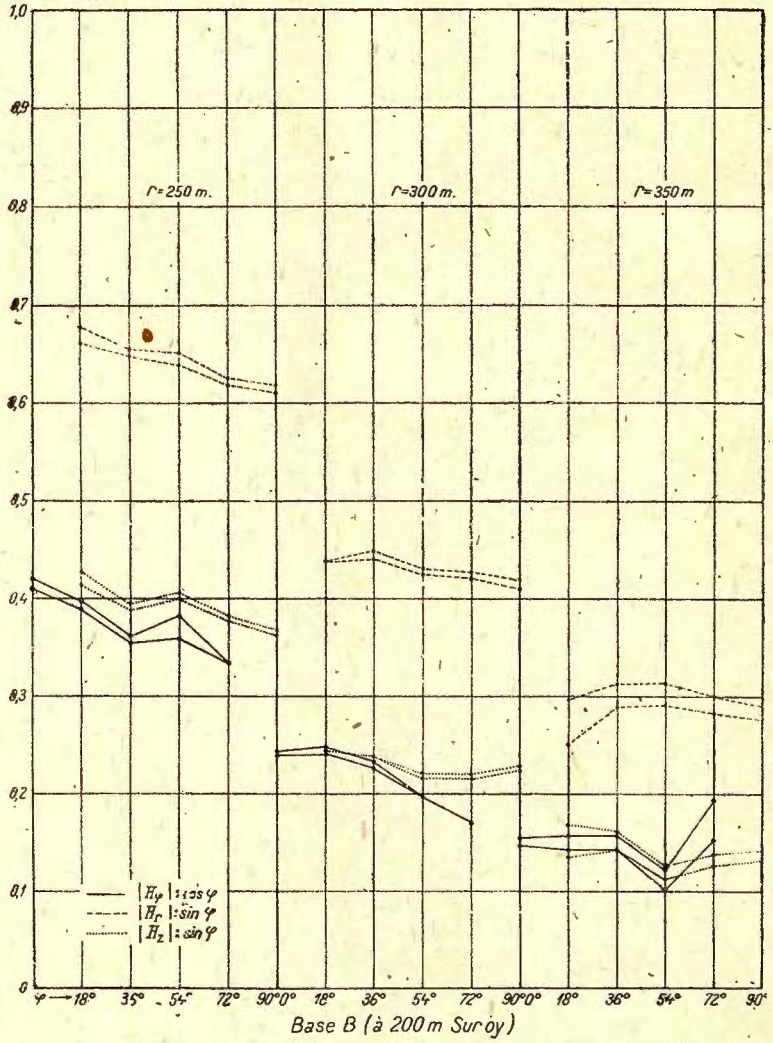

Fig. 17 *a*.—Variation en fonction de l'azimut φ des rapports | Hφ | / cos φ, | H_r | / sin φ, | H_z | / sin φ. Valeurs de ces quantités en unités conventionnelles B, pour les distances r = 250 m., 300 m., 350 m.; les deux valeurs marquées correspondent aux deux courbes d'étalonnage, initial et final.

Institutul Geologic al României

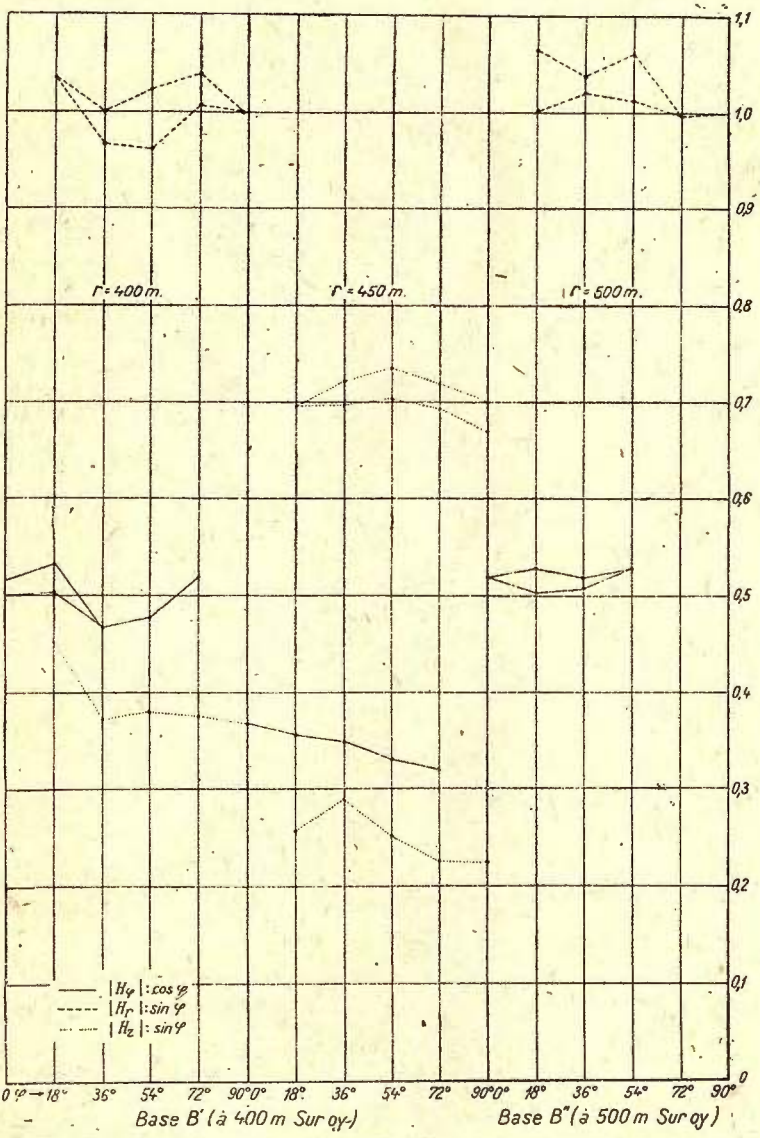

Fig. 17 *b*. — Variation en fonction de l'azimut φ des rapports | Hφ | / cos φ, | Hr | / sin φ, | Hz | / sin φ (suite). Valeurs de ces quantités en unités conventionnelles B', pour les distances $r = 400$ m. et $r = 450$ m., et unités B'' pour $r = 500$ m.

INSTITUTUL GEOLOGIC - BIBLIOTECA
Institutul Geologic al României

On remarque que les écarts entre les valeurs *constantes* prévues par la théorie et celles que fournit l'expérience sont peu importantes et pourraient avoir un caractère fortuit.

b) Lois des rapports des amplitudes locales. Une conséquence immédiate de la théorie developpée au chap. II concerne les rapports des amplitudes $|H_r|$, $|H_\varphi|$, $|H_z|$ mesurées en une même station. On peut l'énoncer comme suit:

Les rapports

$$\frac{|H_z|}{|H_r|} \quad , \quad \frac{|H_z|}{|H_\varphi|} \cot \varphi$$

qui, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus, sont indépendants de l'azimut ont une variation radiale qui dépend d'une manière bien définie de la distance numérique $u = |\gamma| r/2$, dans le cas d'un sous-sol normal.

Cette variation radiale théorique est représentée par les courbes en traits pleins du graphique logarithmique (18 a). L'échelle logarithmique a été choisie pour permettre la comparaison des courbes théoriques avec les résultats expérimentaux inscrits sur un graphique analogue (18 b); par simple translation suivant l'axe des abcisses, on doit pouvoir amener les deux graphiques en coïncidence.

On constate que les moyennes des résultats d'expérience se superposent assez bien avec les courbes théoriques lorsque l'unité de distance numérique a pour valeur 181 m.

Si l'on considère la définition (2-2) des quantités γ, l'égalité ci-dessus s'écrit

$$\sqrt{\pi\sigma\omega} \times 181 \cdot 10^2 = 1$$

ou, en termes de résistivités, pour la fréquence $f = 370$ per/sec.

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = 2\pi^2 \cdot 370 \cdot 181 \cdot 10^{-5}\ \Omega/\text{cm}^3. = 2356\ \Omega/\text{cm}^3.$$

$$= 23{,}56\ \Omega/\text{m}^3.$$

Cette valeur est bien de l'ordre de grandeur que SCHLUMBERGER [23] a trouvé pour les résistivités de l'étage Levantin, au

Institutul Geologic al României

cours de ses nombreuses mesures effectuées en Roumanie par la méthode des sondages électriques.

Nous remarquerons encore que cette valeur coïncide bien vec celle donnée par les mesures du champ de l'émetteur de grande longueur, exécutées dans la même région au cours de l'année 1932 [22].

Institutul Geologic al României

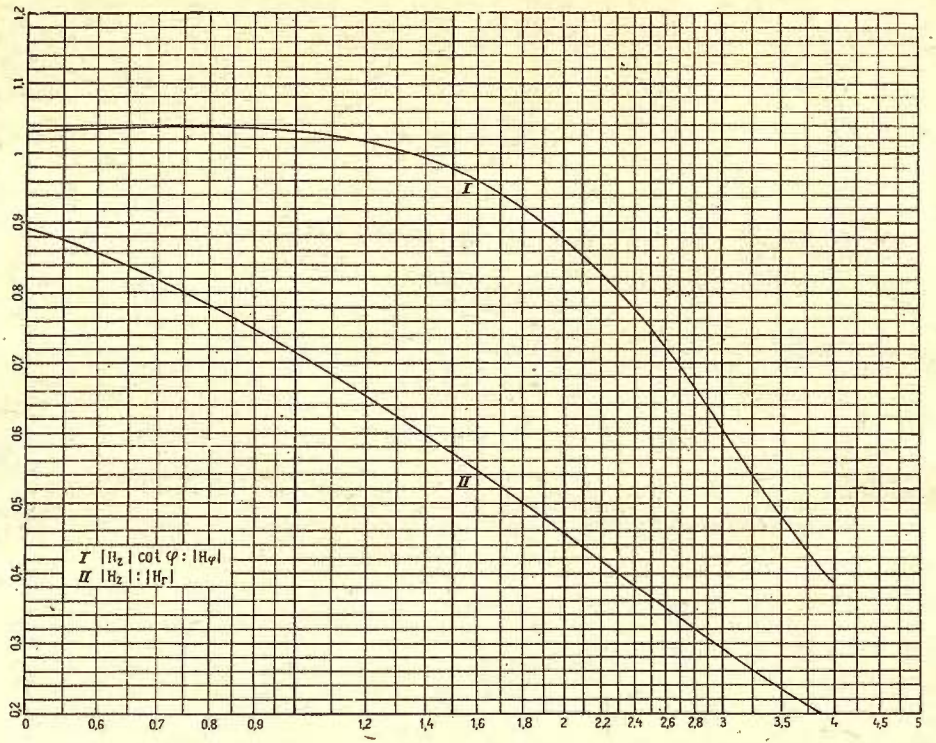

Fig 18 *a* — Variation radiale théorique des rapports d'amplitude des composantes magnétiques.

Institutul Geologic al României

CONCLUSIONS.

D'après le degré de généralité admis dans les hypothèses initiales pour les milieux dans lesquels se propage le champ de l'émetteur T.P.S., les conclusions auxquelles notre étude a pu aboutir sont très différentes au point de vue de leur expression analytique, leur évaluation numérique et la possibilité de leur contrôle expérimental.

a) Dans le cas où l'on tient compte des constantes diélectriques de l'air et du sol (ch. I), il a été possible, par l'introduction d'un potentiel vecteur électrique Ω, de présenter une nouvelle forme analytique de la théorie de l'émission des antennes radioélectriques. Des relations entre les radiations des différents types d'antennes, inapparentes dans la théorie de SOMMERFELD et HOERSCHELMANN, ont été mises en évidence.

b) L'hypothèse plus restrictive des courants de capacité négligéables (cas quasistationnaire, $\varepsilon = \varepsilon_0 = 0$) nous a permis (ch. II et III) d'aboutir à des conclusions numériques précises au sujet de la distribution du champ électromagnétique à la surface et l'intérieur du sol.

Présentés sous forme de tableaux numériques et graphiques cotés, ces résultats sont préparés pour le contrôle expérimental.

c) Au point de vue de l'effet pélliculaire (skin-effect), nos graphiques montrent que celui-ci existe même au voisinage immédiat de l'émetteur, mais n'a pas une trop grande influence sur la distribution é.m. stationnaire jusqu'à la distance numérique $u = 2$. Au delà de $u = 2$, le skin-effect devient essentiel pour la description du champ é. m. considéré.

Institutul Geologic al României

d) Un phénomène intéressant a été révélé par l'étude de la composante électrique j_φ: sur la verticale de l'émetteur, l'effet pelliculaire est réduit dans une large proportion par un effet antagoniste, qui conserve au champ électrique des valeurs très proches, de celles du cas stationnaire (fig. 11 c) jusqu'à une profondeur numérique d'environ $u = 2$.

e) Au point de vue des applications et pour les raisons indiquées dans notre préface, la composante électrique E_φ et les c. magnétiques H_r et H_z sont les plus recommandables pour être mesurées par la prospection électromagnétique;

f) Les vérifications expérimentales qui ont été examinées (ch. V) sont favorables à la théorie proposée dans les chapitres antérieurs. En particulier, les mesures locales d'une équipe de l'Institut Géologique de Roumanie ont confirmé d'une manière satisfaisante aussi bien la validité des lois de variation azimutale des composantes H, que celles des lois de variation radiale des amplitudes de ces composantes.

Institutul Geologic al României

BIBLIOGRAPHIE.

1. FOSTER R. M. Mutual impedance of grounded wires lying on the surface of the earth. *Bell System Tech. Journal* X, 408—419, July 1931.
2. FOCK V. Zur Berechnung des elektromagnetischen Wechselstromfeldes bei ebener Begrenzung. *Ann. der Physik.* XVII, 401—420, 1933.
3. HOERSCHELMANN H. v. Über die Wirkungsweise des gecknickten Marconischen Senders in der drahtlosen Telegraphie. *Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph.* V, 14 u. 188, 1911.
4. SOMMERFELD A. Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie. *Ann. der Physik,* IV, 28, 665, 1909.
5. SOMMERFELD A. Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie. *Ann. der Physik* IV, 81, 1135—1153, 1926.
6. SOMMERFELD A. Riemann-Weber's Differentialgleichungen der Physik 7. Auflage. Vieweg 1927. T. II, Kap. 16, Drahtlose Telegraphie.
7. RIORDAN J. - SUNDE E. Mutual impedance of grounded wires for horizontally stratified two layer earth. *Bell Syst. Tech. Journal.* XII, 162—177. April 1933.
8. STEFANESCU S. - SCHLUMBERGER C. et M. Études théoriques sur la prospection électrique du sous-sol. II série. *Inst. Geol. Rom. Studii Technice şi Economice.* Vol. XIV. Fasc. 2, 1932.
9. WEYL H. Ausbreitung elektromagnetischen Wellen über einen ebenen Leiter. *Ann. der Physik* LX, 481, 1919.
10. STRUTT M. J. O. Strahlung von Antennen unter dem Einfluss der Erdbodeneigenschaften. *Ann. der Physik* V. 1.721—772, 4.1—16, 9.67—91, 1929—1931.
11. GROSSKOPF J. Das Strahlungsfeld eines vertikalen Dipolsenders über geschichteten Erdboden. *Hochfrequenztechnik u. Elektroakustik* 60, 136, 1942.
12. ABRAHAM M. Die Induktion von Wechselstromen in einer ebenen leitenden Schicht. *Zs. ang. Math. u. Mech.* II. 109, 1922.

Institutul Geologic al României

13. ABRAHAM M., RAUSCH VON TRAUBENBERG u. PUSCH. Physik. Zs. XX. s. 150, 1919.
14. POLLACZEK F. Über das Feld einer unendlich langen wechselstrom-durchflossenen Einfachleitung. *Elektr. Nachr. Tech.* III, s. 339, 1926.
15. HABERLAND G. Theorie der Leitung von Wechselstrom durch die Erde. *Zs. ang. Math. u. Mech.* VI, s. 366, 1926.
16. CARSON J. Wave propagation in overhead wires with grounded return. *Bell Syst. Tech. Journal* V. 539—554, Oct. 1926.
17. JAHNKE-EMDE. Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Teubner, II Auflage.
18. WATSON G. N. Theory of Bessel functions. Cambridge, 1922.
19. STEFANESCU S. Études théoriques sur la prospection électrique du sous-sol. I série. *Inst. Geol. Rom. Studii Technice şi Economice.* Vol. XIV. Fasc. 1, 1929.
20. LUDWIGER H. v. Das elektrische und magnetische Feld um einen Erdstrahler. *Beitr. z. ang. Geophysik* I. 189—226, 1930.
21. POLDINI. Les sondages électriques. *Bull. Tech. de la Suisse Romande.* Lausanne, 1932.
22. GHIŢULESCU T. P., SOCOLESCU M., STEFANESCU S. Le champ magnétique de l'émetteur rectiligne alternatif de grande longueur. *An. Inst. Geol. Rom.* Vol. XVI, 1931.
23. SCHLUMBERGER C. Electrical Prospecting For Oil. The Science of Petroleum. Vol. I. Oxford Univ. Press, 1938.

Institutul Geologic al României

INDEX DES FIGURES.

Fig.		Page
1.	Dispositif pour la mesure des résistivités apparentes	35
2.	Diagrammes complexes des facteurs électriques de c. alternatif	36-37
3.	Lignes d'égale ellipsité de la composante électrique horizontale	40-41
4.	Lignes d'égale valeur maxima de la composante électrique horizontale	40-41
5.	Diagrammes complexes des facteurs magnétiques de c. alternatif	44-45
6.	Construction géométrique de la direction du champ magnétique asymptotique	45
7.	Lignes d'égale ellipsité de la composante magnétique horizontale	46-47
8.	Variation de certaines grandeurs sur la ligne médiane du dipôle	46-47
9.	Lignes d'égale valeur maxima de la composante magnétique horizontale	46-47
10.	Lignes d'égal déphasage de la composante magnétique horizontale maxima	46-47
11.	a.b. Amplitude et phase de la composante électrique tangentielle réduite	56-57
11.	c. Rapport des amplitudes des composantes tangentielles réduites en c. alternatif et c. continu	56-57
12.	a.b. Amplitude et phase de la composante électrique radiale réduite	58-59
13.	a.b. Idem, de la composante électrique verticale réduite . .	60-61
14.	a.b. Idem, de la composante magnétique tangentielle réduite	62-63
15.	a.b. Idem, de la composante magnétique radiale réduite . .	64-65
16.	a.b. Idem, de la composante magnétique verticale réduite .	66-67
17.	a.b. Vérification expérimentale des lois de variation azimutale .	80-81
18.	a.b. Vérification expérimentale des lois de variation radiale des rapports d'amplitudes	82-83

Institutul Geologic al României

TABLE DES MATIÈRES.

Page

Préface 3

CHAPITRE I

Compléments à la théorie Sommerfeld-Hoerschelmann du dipôle hertzien horizontal. Application aux antennes magnétiques.

1. Rappel des principaux résultats de la théorie Sommerfeld-Hoerschelmann du dipôle horizontal 11
2. Introduction d'un potentiel vecteur électrique. Vérifications . 14
3. Expressions sous forme d'intégrales définies des composantes Ω_y et Ω_z dans le sol et dans l'air. 18
4. Relations directes entre les p. v. hertziens des dipôles horizontal et vertical. Antennes magnétiques 20
5. Conclusions 22

CHAPITRE II

Champ T.P.S. quasistationnaire. Potentiel vecteur dans le sol et à la surface. Composantes é.-m. à la surface du sol.

6. Notations. Équations générales 23
7. Expressions intégrales du potentiel vecteur magnétique dans l'air et dans le sol 26
8. Expressions en termes finis des composantes du p. v. dans le sol 28
9. Champ électrique à la surface du sol 34
10. Champ magnétique à la surface du sol 43
11. Application numérique 48

CHAPITRE III

Champ électromagnétique dans le sol.

12. Champ électrique à l'intérieur du sol. 51
13. Champ magnétique à l'intérieur du sol 60

Institutul Geologic al României

Page

14. Calculs numériques 67
Note concernant le potentiel vecteur électrique du dipôle quasistationnaire 69

CHAPITRE IV

Vérifications expérimentales.

15. Recherches de H. von Ludwiger 71
16. Expériences avec l'émeteur T.P.S. de T.P. Ghiţulescu, M. Socolescu et S. Stefanescu 73
Conclusions 83
Bibliographie 85
Index des figures 87
Table des matières 88

GEOLOGIC - BIBLIOTECA 60.159

Institutul Geologic al României

Institutul Geologic al României

Institutul Geologic al României

C. 33.324.

Institutul Geologic al României